Sintaxis, Semántica y el Problema de la Identidad de los Items Matemáticos

Gian-Carlo Rota, David Sharp y Robert Sokolowski.

Los ítems de la matemática, tales como la línea recta, el triángulo, los conjuntos y los números naturales, comparten la propiedad de conservar su identidad al ser dotados presentaciones axiomáticas que pueden variar radicalmente. Los matemáticos han axiomatizado la línea recta como un continuum unidimensional, como un campo ordenado arquimediano completo, un campo real cerrado o como un sistema de decimales binarios donde las operaciones aritméticas se realizan de una cierta manera. Cada una de esas axiomatizaciones es entendida por los matemáticos como una axiomatización de la *misma* recta real. Esto es, el ítem matemático así axiomatizado se presume el *mismo* en cada caso, y tal identidad no es cuestionada. Queremos analizar las condiciones que hace posible referirse al mismo ítem matemático mediante de una variedad de presentaciones axiomáticas.

El análisis de la mismidad de los ítems matemáticos, como llamaremos a los constructos de la matemática, apunta a un problema muy cercano, un problema que fue reconocido en un comienzo por la lógica simbólica pero que tiene un espectro más amplio. Una presentación de un sistema matemático que conduce a la definición de un ítem es por necesidad sintáctica, esto es, está dada por axiomas y reglas de inferencia. Los axiomas y las reglas de inferencia pretenden caracterizar una clase de ítems matemáticos que consisten en conjuntos con cierta estructura adicional (como grupos, variedades, etc.). Cualquier estructura que satisfaga los axiomas se llama un *modelo* de los axiomas, y la descripción de todos los modelos es la interpretación semántica de la teoría. El problema de la identidad en matemáticas puede ser visto como el problema de explicar cómo sintaxis distintas pueden tener la misma semántica, esto es, los mismos modelos.

Esta dualidad de presentación sintáctica y semántica es compartida por todas las teorías matemáticas.

Examinaremos algunos ejemplos de descripción semántica y sintáctica de teorías matemáticas, donde se puede tener sintaxis sin semántica, o semántica sin sintaxis. Ilustraremos mediante ejemplos la multiplicidad de presentaciones axiomáticas que pueden presentarse para un mismo ítem.

Una comprensión adecuada de la identidad matemática requiere una teoría que aún no existe y que ha de dar cuenta de las relaciones entre los sistemas formales que describen los mismos ítems. Hoy, tales relaciones pueden, en el mejor de los casos, ser descritas heurísticamente en términos que invoquen una noción de un “usuario inteligente fuera del sistema”.

Subrayaremos el hecho de que los problemas de identidad referencial y de sintaxis / semántica, aunque originarios de la matemática, son universales para toda la ciencia.

Sintaxis y Semántica.

Podemos entender mejor la sintaxis y la semántica en un sistema formal usando el ejemplo que dio origen a tales nociones; esto es, el cálculo proposicional o álgebra booleana o teoría de retículos distributivos, como ha sido múltiplemente llamado; y su extensión al cálculo de predicados mediante la adición de cuantificadores.

El álgebra de conjuntos, y el hecho de que los conjuntos puedan ser manipulados mediante operaciones algebraicas, ha fascinado matemáticos y filósofos desde Leibniz. En el siglo XIX, en el trabajo de Boole, Schröder, Peirce, Peano y otros, encontramos los primeros intentos de axiomatización. El resultado último de destilar estas ideas es la noción de retículo que satisface la ley distributiva; esto es, de una estructura sintáctica que consiste en dos operaciones llamadas *inf* y *sup* (en símbolos, respectivamente, $\wedge$ y $\vee$), que satisfacen las leyes usuales de idempotencia, conmutatividad, asociatividad y absorción, y además satisfacen la ley (identidad) distributiva: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Se trata de un gran logro de la matemática haber demostrado que la ley distributiva sola constituye la sintaxis para la estructura que consiste en una familia de conjuntos cerrados bajo uniones e intersecciones. Es más, puede construirse un modelo para cada retículo distributivo usando la descripción sintáctica. La teoría de conjuntos se transforma así en un sistema algebraico (en el sentido del álgebra universal) que sólo depende de identidades, y todos los modelos de tal sistema algebraico resultan ser familias de conjuntos. No se puede esperar una forma más definitiva de atrapar la semántica.

Este resultado, establecido claramente por primera vez por Garrett Birkhoff y Marshall Harvey Stone, constituye el paradigma de la formalización de una teoría matemática. A pesar de lo elemental que ha llegado a ser tras sucesivas presentaciones y simplificaciones, la teoría de retículos distributivos es la instancia ideal de una teoría matemática, en la cual se especifica una sintaxis junto con una descripción completa de todos los modelos, y, aún más, se da una tabla de conceptos semánticos y sintácticos junto con un algoritmo de traducción entre ambos tipos de conceptos. Tal algoritmo es un "teorema de completitud".

En el mapa del cálculo proposicional ha sido establecido un programa para un análisis de la relación "sintaxis / semántica" aún no formalizado como tal, que en principio debe ser aplicable a toda teoría matemática. Este programa consiste, burdamente, en lo siguiente:

1. Un criterio de equivalencia sintáctica ("criptomorfismo") aplicable a todas las presentaciones axiomáticas. En nuestro estado actual de comprensión de los

sistemas formales, no es claro lo que tal criterio debe ser, aunque en la práctica matemática nunca hay duda alguna acerca de la equivalencia de diferentes presentaciones de la misma teoría.

2. Una “clasificación” de los modelos semánticos de la teoría independientemente de la escogencia de una axiomatización particular.
3. Un “teorema de completitud” relacionando la verdad en todos los modelos (“verdad semántica”) con la verdad como prueba desde los axiomas (“verdad sintáctica”).

Comenzamos por listar unos pocos ejemplos de teorías matemáticas activas en las cuales hace falta la sintaxis o la semántica.

El desarrollo sintáctico del cálculo de predicados mediante el operador $\in$ de Hilbert ha resistido hasta ahora a todos los intentos de interpretación semántica. Brevemente, el operador ϵ de Hilbert es una lograda formalización sintáctica de la noción “la variable individual x tal que F(x) es verdad, si existe” donde F(x) es un predicado. Uno reemplaza la sentencia $(\exists x)\ F(x)$ por la proposición $F(\epsilon(F(x)))$. De igual manera, antes del trabajo de Kripke y demás, las semánticas de las lógicas intuicionista y modales no se conocían.

Estos son ejemplos de estructuras sintácticas que no tienen semántica. El descubrimiento de todos los modelos de la lógica intuicionista condujo a un avance importante en la lógica, por ejemplo, al constatar que la lógica intuicionista constituye una presentación sintáctica de la idea de forcing de Paul Cohen.

Desde von Neumann se concuerda en que los subespacios cerrados de un espacio de Hilbert son los análogos en mecánica cuántica de los eventos probabilísticos. La teoría de espacios cerrados de un espacio de Hilbert constituye una semántica sencilla para la mecánica cuántica. Sin embargo, numerosos intentos por desarrollar una “lógica de la mecánica cuántica” han fracasado. Nadie ha conseguido desarrollar una presentación sintáctica de los eventos de la mecánica cuántica. La teoría de retículos modulares, o la teoría de retículas ortomodulares, hasta ahora, han tenido muy poco éxito justamente porque su semántica no concuerda con la práctica de la mecánica cuántica.

A través de las matemáticas se dan más a menudo las estructuras que son semánticamente descritas que las que lo son sintácticamente. Esto no es de sorprenderse: la sintaxis de una estructura es a menudo el resultado de repensar las cosas.

El caso de la lógica matemática, donde la sintaxis fue desarrollada antes de la semántica, es excepcional debido a la inusual historia de la materia. Una instancia de semántica sin sintaxis es la teoría de multiconjuntos. Un multincojunto de un conjunto S es una generalización de la idea de subconjunto de S, donde se permite que los elementos ocurran con multiplicidades. Los multiconjuntos pueden ser sumados y multiplicados; sin embargo, una caracterización mediante operaciones algebraicas de la familia de multiconjuntos de un conjunto S – algo análogo de lo que es el álgebra Booleana para los conjuntos – no se conoce aún. Este problema tiene un interés más que académico. Existe una dualidad entre el álgebra de conjuntos y el álgebra de multiconjuntos que bien podría ser elucidada mediante una descripción sintáctica.

Otro ejemplo de una teoría semántica que carece de sintaxis es la teoría de la probabilidad. Los estadísticos y probabilistas utilizan presentaciones sintácticas informales al pensar y hablar unos con otros. Cuando un probabilista piensa en una cadena de Markov, raramente apela al espacio de caminos en el que la cadena de Markov puede realizarse. El estadístico que está acostumbrado a calcular intervalos y niveles de significancia raramente apela a modelos de teoría de la medida. En una presentación sintáctica de la probabilidad, las distribuciones de probabilidad son similares a los valores de verdad en el cálculo de predicados. El teorema de consistencia de Kolmogorov es un teorema de completitud que relaciona la sintaxis y la semántica de la probabilidad.

La Variedad de Presentaciones Axiomáticas de un Item.

No tiene por qué que haber una correspondencia uno a uno entre sistemas axiomáticos (sintaxis) y modelos (semántica). Un sistema axiomático diseñado para un modelo específico puede resultar tener otros modelos, que a veces son llamados modelos no-estándar. Y al revés, la misma teoría matemática puede ser presentada mediante una variedad de sistemas axiomáticos criptomorfos.

Es imposible enumerar todos los sistemas axiomáticos de una teoría. La teoría de grupos puede ser axiomatizada en innumerables formas, algunas de las cuales pueden incluso utilizar operaciones ternarias. Cada una de estas axiomatizaciones ha sido guiada por una comprensión previa de la noción de grupo. El concepto de grupo se aprende en un sistema axiomático específico. El estudiante usará la axiomática como una muleta a ser olvidada tan pronto como se familiarice con la teoría y pueda así liberarse de depender de cualquier formulación axiomática. Llamaremos *captación pre-axiomática* a la comprensión de la noción de grupo que es libre de la elección de sistema axiomático. Una captación pre-axiomática de la noción de grupo no puede ser cosechada a partir de cierta familiaridad con grupos específicos y sus propiedades "comunes". El hecho de que exista una variedad de sistemas axiomáticos para la teoría de grupos no privilegia ningún sistema, sino que por el contrario presupone la captación pre-axiomática de la noción de grupo.

La comprensión de una teoría matemática no es el resultado de una familiaridad ilustrada con un sistema axiomático dada una vez y para siempre. Para el matemático, un sistema axiomático es una ventana a través de la cual un ítem, sea un grupo, un espacio topológico, o la recta real, puede ser percibido desde diferentes ángulos que revelarán por ello mismo posibilidades insospechadas.

La recta real ha sido axiomatizada por lo menos de seis maneras diferentes, donde cada una apela a diferentes áreas de la matemática, al álgebra, a la teoría de números, a la topología. Los matemáticos todavía están descubriendo nuevas axiomatizaciones de la recta real. Tal riqueza de axiomatizaciones muestra que para el matemático sólo existe *una* recta real. Entre más extravagantes llegan a ser las axiomatizaciones, más se afianza la captación pre-axiomática de la una y única recta real. La necesidad de posteriores axiomatizaciones es motivada por el descubrimiento de nuevas propiedades de la recta real. El matemático quiere encontrar qué *más* puede ser la recta real. Quiere tener más perspectivas sobre una y la misma recta real. Tales perspectivas son precisamente las varias axiomatizaciones, los nuevos sistemas sintácticos que siempre tienen el mismo modelo. La necesidad de más perspectivas sobre uno y el mismo ítem matemático es parte de la estructura formal de las matemáticas.

Todo sistema axiomático para la recta tiene una pretensión de definitividad que es desmentido por el carácter abierto de las propiedades de la recta real. Este carácter abierto es una propiedad de todos los ítems matemáticos.

Conclusión.

Una descripción completa de la estructura lógica de un ítem matemático está más allá del alcance del método axiomático tal como se lo entiende hoy.

Dos o más sistemas axiomáticos para la recta real pueden reconocerse como teniendo la *misma* recta real como modelo. Este reconocimiento no es llevado a cabo al interior de ningún sistema axiomático o al comparar distintos sistemas axiomáticos; constituye la captación preaxiomática de la recta real. La noción de captación preaxiomática tiene las siguientes consecuencias.

1. La recta real, o cualquier ítem matemático, no se puede atrapar plenamente mediante ningún sistema axiomático particular.

2. La totalidad de sistemas axiomáticos posibles para la recta real no puede ser prevista. Cualquier ítem matemático hace posible una secuencia sin fin de presentaciones axiomáticas. Cada nueva presentación pretenderá revelar aspectos nuevos del ítem matemático en cuestión.

3. Aprender acerca de la recta real no consiste en un juego con axiomas en el cual la habilidad consiste en sacar consecuencias. Más bien, la escogencia de propiedades a ser probadas y la organización de la teoría son guiadas por una captación pre-axiomática. Sin una captación pre-axiomática, ninguna teoría matemática puede tener *sentido*.

4. Si bien un concepto puede aprenderse al trabajar mediante un acercamiento axiomático, ese acercamiento particular es abandonado una vez se ha logrado familiaridad. Al aprender mediante un sistema axiomático particular, apenas se revela un concepto cuya comprensión yace *más allá* del alcance del sistema axiomático mediante el cuál fue aprendido.