La fenomenología de la demostración matemática.

Gian Carlo Rota

¿Qué es una demostración matemática?

Todo el mundo sabe qué es una demostración matemática. Una demostración de un teorema matemático es una sucesión de pasos que conducen a la conclusión deseada. Las reglas que dichas sucesiones de pasos deben seguir fueron hechas explícitas cuando fue formalizada la lógica al principio de este siglo, y no han cambiado desde entonces. Estas reglas pueden ser usadas para refutar una pretendida demostración localizando errores lógicos; sin embargo, no pueden ser usadas para encontrar una demostración que no se tenga de una conjetura matemática.

La expresión 'demostración correcta' es redundante. La demostración matemática no admite grados. Una sucesión de pasos en un argumento es o bien una demostración o bien es un sinsentido. Los argumentos heurísticos son de uso común en la práctica de la matemática. Sin embargo, los argumentos heurísticos no son vistos como parte de la lógica formal. El rol de los argumentos heurísticos ha sido reconocido pocas veces en la filosofía de la matemática, a pesar del papel crucial que juegan en el descubrimiento matemático.

La noción matemática de demostración es marcadamente distinta de las nociones de demostración en otras áreas, como los juzgados, la conversación diaria y la física. Las demostraciones dadas por físicos sí admiten grados: dos pruebas de una misma afirmación física tiene diferentes grados de corrección. Abra cualquier libro de física, y hallará que aparecen grados de corrección de demostraciones. Por ejemplo, el célebre argumento de Peierls para la mecánica estadística desde el punto de vista matemático no tenía sentido cuando fue propuesto por primera vez por Sir Rudolph Peierls, y siguió siendo matemáticamente carente de sentido aún al pasar por una larga sucesión de demostraciones en el sentido aceptado por los físicos. Cada nueva demostración fue considerada más correcta que la anterior, hasta que una demostración ``final'' fue hallada; la única que un matemático aceptaría.

El método axiomático por medio del cual escribimos la matemática es el único que garantiza la verdad de una afirmación matemática. Sin embargo, una discusión del método axiomático no nos dice mucho acerca de la demostración matemática. Nuestro propósito es develar algunos de los rasgos distintivos del pensamiento matemático que están ocultos bajo la mecánica aparente de la demostración matemática. Alegaremos, usando muchos ejemplos, que la descripción de demostración matemática que usualmente damos es verdadera, pero no es realista. Son muchos rasgos del pensamiento matemático que son dejados de lado por la noción formal de demostración. Se los conoce desde hace mucho tiempo, pero pocas veces se los ha discutido.

Nuestro ideal de realismo es tomado de la fenomenología de Edmund Husserl. Hace muchos años, Husserl dio algunas de las reglas a seguir en una descripción realista. Vale la pena recordar algunas de estas reglas.

1. Una descripción realista debe develar rasgos ocultos. Los matemáticos no predican lo que practican. Se rehusan a aceptar formalmente lo que hacen en su trabajo diario.
2. Fenómenos laterales que normalmente se mantienen relegados deben ser tratados con su debida importancia. El vocabulario de oficio de los matemáticos incluye palabras como 'entendimiento', 'profundidad', 'tipos de demostración', 'grados de claridad' y muchos otros. Una discusión rigurosa de los roles de esos términos debería ser parte de la filosofía de la demostración matemática.
3. El realismo fenomenológico exige que no se fabriquen excusas que puedan conducir a desechar cualquier rasgo de la matemática poniéndole el rótulo de psicológico, sociológico o subjetivo.
4. Todas los presupuestos normativos deben ser erradicados. Con excesiva frecuencia, supuestas descripciones de la demostración matemática son peticiones escondidas de lo que el autor cree que una demostración matemática debería ser. Se impone una actitud estrictamente descriptiva, a pesar de sus dificultades y peligros. Puede conducir a descubrimientos desagradables: por ejemplo, uno podría llegar a darse cuenta que no hay rasgos comunes compartidos por todas las demostraciones matemáticas. O incluso, uno podría ser llevado a admitir que las contradicciones son parte de la realidad de la matemática, a la par con la verdad.

Demostración por verificación

¿Qué es una 'verificación'? En el sentido ordinario, una 'verificación' es un argumento que establece la verdad de una afirmación por medio de una lista de todos los casos posibles. La verificación es uno de los varios *tipos* de demostración matemática. Un no-matemático podría creer que una demostración por verificación es la más convincente de todas las clases de demostración. Una lista completa y explícita de todos los casos posibles parece ser irrefutable. Sin embargo, a los matemáticos no les impresiona la mera irrefutabilidad. Aunque no niegan la validez de una demostración por verificación, rara vez quedan satisfechos con tales demostraciones. La irrefutabilidad no es uno de los criterios que usará un matemático al juzgar el valor de una prueba. El valor de una demostración depende más bien de si ésta puede o no ser convertida en una técnica de demostración, esto es, de si la demostración puede ser vista como una instancia de un tipo de demostración, que se pueda usar para demostrar otros teoremas.

Las demostraciones por verificación suelen ser poco extrapolables. Un ejemplo muy sencillo de un teorema matemático para el cual puede darse una demostración por verificación, pero generalmente se evita, es el teorema de las cajas. Este teorema afirma que siempre que uno tiene n+1 fichas para colocar en n cajas, entonces siempre quedarán por lo menos dos fichas en una misma caja.

Esta afirmación es tan intuitiva que parece no necesitar demostración. Observe sin embargo que la evidencia de este teorema es de una *clase* particular. El teorema de las cajas es la instancia más simple de una demostración de existencia. En otras palabras, no se da ningún método para determinar cuál de las n cajas terminará con por lo menos dos fichas.

Ante un observador escéptico (o un computador), que no quiere aceptar una demostración de existencia, el argumento intuitivo debe ser reemplazado por una verificación. Una verificación del teorema de las cajas puede ser dada, pero no resultará ni simple ni esclarecedora. Consistirá en un algoritmo que escriba la lista de todas las maneras de colocar n+1 fichas en n cajas, y luego verifique que para cada posicionamiento por lo menos una caja termina con dos fichas. Cualquier algoritmo que haga eso usará inducción, y sería el hazmereir de los matemáticos.

¿Por qué es preferible la demostración de existencia a la demostración por verificación en el caso del teorema de las cajas? Porque la demostración de existencia brilla con la luz de un principio universal, que ninguna verificación puede emular. Una revisión somera de la historia del teorema de las cajas confirma la superioridad de la demostración de existencia.

La demostración de existencia del teorema de las cajas fue el punto de partida del descubrimiento de una lista de profundos teoremas en combinatoria, ahora llamados teoremas de tipo de Ramsey. La verificación de cualquier teorema de tipo de Ramsey, que consistiría de una lista de todos los casos, es posible, pero solo *en principio*. Cualquier verificación de ese estilo requeriría una velocidad de cálculo más allá del alcance de los computadores más rápidos posibles.

Las demostraciones de teoremas de tipo de Ramsey son demostraciones de existencia, que en últimas están basadas en el teorema de las cajas. Todas estas demostraciones son no-constructivas; sin embargo, proveen la evidencia incontrovertible de la posibilidad de verificación. Así, las demostraciones de tipo Ramsey son un ejemplo de una posibilidad puesta en evidencia por una demostración de existencia, aunque tal posibilidad no pueda ser convertida en acto.

¿Es toda verificación una demostración?

Es un hecho que no todas las verificaciones son aceptadas como demostraciones, a pesar de los logros numerosos de demostraciones por verificación. El caso más famoso de una verificación que no logra ser aceptada como demostración -a pesar de su innegable correctitud- es la verificación por computador de la conjetura de los cuatro colores.

Las bisagras matemáticas de dicha verificación fueron desarrolladas hace un buen tiempo por el matemático de Harvard George David Birkhoff. Después de varios intentos fallidos por varios matemáticos de llevar a cabo el programa de Birkhoff, la ayuda de un computador fue usada como recurso desesperado. Un astuto programa de computador fue diseñado por los matemáticos de Illinois Haken y Appel. El programa de computador llevó a cabo con éxito la larga serie de verificaciones que Birkhoff había previsto, y así estableció la verdad de la conjetura de los cuatro colores. Su 'demostración' fue la primera verificación de un gran teorema matemático por un computador.

Los matemáticos han sido ambivalentes con respecto a esa verificación. Por un lado, todo matemático expresa alivio al saber que la conjetura ha sido decidida. Por otro lado, el comportamiento de la comunidad de matemáticos desmiente tal sentimiento de satisfacción. De hecho, si los matemáticos hubieran quedado satisfechos con la verificación por computador de la conjetura de los cuatro colores, ninguno habría sentido la necesidad de llevar a cabo más verificaciones. Empero, hemos presenciado una secuencia interminable de verificaciones alternas por computador, cada una bastante distinta de las demás, y cada una supuestamente 'más sencilla' que las anteriores. Cada nuevo programa de computador para la conjetura de los cuatro colores corrige alguna inadvertencia menor de los programas precedentes. Curiosamente, ninguna de estas extrañas inadvertencias es lo suficientemente seria como para invalidar las verificaciones precedentes.

Si creyéramos que la verificación de la conjetura de los cuatro colores es definitiva, entonces nos tocaría considerar todas las verificaciones posteriores como una pérdida de tiempo, como un 'juego de machismo' de matemáticos. Pero esto no es lo que ha sucedido desde el trabajo de Haken y Appel. La comunidad matemática, lejos de ver las verificaciones sucesivas como un pasatiempo frívolo, las sigue con interés apasionado. La última verificación invariablemente recibirá amplia publicidad y es sujeta a un intenso escrutinio.

Hay entonces fortísima evidencia de que ninguna verificación por computador de la conjetura de los cuatro colores será aceptada como definitiva. Los matemáticos están al acecho de un argumento que hará obsoletas a todas las verificaciones por computador, un argumento que develará la *razón* aún escondida de la verdad de la conjetura. Es significativo que Sami Beraha, el experto número uno mundial en esta conjetura, mantiene hasta el día de hoy que la conjetura es 'indecidible' en un sentido u otro, a pesar de toda la evidencia por computador de lo contrario.

El ejemplo de la conjetura de los cuatro colores conduce a una conclusión inescapable. No todas las demostraciones dan razones satisfactorias de por qué una conjetura es verdadera. La verificación es demostración, pero la verificación puede no dar la *razón*. En ese caso, ¿qué entendemos por la *razón*?

Consideremos otro ejemplo de verificación. La clasificación de los grupos de Lie simples dada hace unos cien años por Cartan y Killing está basada en la verificación de que tan solo pueden encontrarse un número finito de configuraciones de vectores que satisfagan ciertas condiciones. Hasta nuestros días, su verificación no ha sido mejorada significativamente, y tampoco se ha sentido la necesidad de otra demostración.

Pero la clasificación de Cartan-Killing de los grupos de Lie simples falla en dar la razón de algunos de los grupos de la lista. La lista de Cartan contiene los grupos de Lie que cualquiera espera encontrar, pero además contiene cinco grupos de Lie que en tiempos de su descubrimiento no parecían conformarse a ningún patrón.

De nuevo, si los matemáticos quedaran satisfechos con una mera lista, entonces ningún trabajo adicional relacionado con la clasificación de los grupos de Lie hubiera sido llevado a cabo.

Pero una vez más, esto no es lo que sucedió. La existencia de cinco grupos de Lie 'excepcionales' se convirtió en una espina clavada en la carne de todo algebrista. Fue un duro recorderis de la arbitrariedad de los eventos en el mundo real, una arbitrariedad de la cual se suponía que la matemática procuraba salvación. Se convirtió en un asunto de honor matemático encontrar la razón de la existencia de los cinco grupos de Lie excepcionales. Y así, una larga serie de artículos matemáticos comenzó a aparecer, en los cuales se estudiaban los grupos de Lie excepcionales desde todo punto de vista concebible. El objetivo tácito de estas investigaciones era encontrar tal razón. Con el paso del tiempo, el matemático de MIT Bertram Kostant desenmadejó el misterio de los grupos de Lie excepcionales atreviéndose a dar un salto de fe. Sucedió que los grupos de Lie excepcionales no son el único fenómeno aparentemente arbitrario en la teoría de Lie. Existe en esta teoría otro fenómeno aparentemente arbitrario. El grupo especial ortogonal de dimensión 8, SO8, tiene una propiedad muy inusual. Su grupo recubridor o de spin tiene un automorfismo externo. Este fenómeno sucede tan solo en dimensión 8.

Kostant conjeturó con éxito que los dos fenómenos arbitrarios deberían estar relacionados, y encontró la *razón* de la existencia de los cinco grupos de Lie excepcionales en el automorfismo externo del grupo ortogonal en dimensión 8, por un *tour de force* que hasta nuestros días se mantiene como una joya de razonamiento matemático.

Una vez más, llegamos a la conclusión de que los matemáticos no quedan satisfechos con demostrar conjeturas. Quieren saber *la razón*.

¿Teoremas o demostraciones?

Filósofos de todas las épocas se han preocupado por problemas de prioridad ontológica. ¿Qué viene primero? ¿Cuáles son los componentes primarios del mundo? Los matemáticos se preocupan por una versión en miniatura de este problema. ¿De qué está hecha primariamente la matemática? Existen, grosso modo, dos escuelas.

La primera escuela sostiene que la matemática consiste primariamente de hechos, hechos del estilo de 'existen solo cinco sólidos regulares en el espacio'. Los hechos de la matemática revelan rasgos útiles del mundo. No importa cómo se obtienen esos hechos, siempre y cuando sean verdaderos.

Por otro lado, la segunda escuela sostiene que los teoremas matemáticos han de ser vistos como peldaños, como si fueran mojones más o menos arbitrarios que sirven para separar una demostración de la siguiente. Las demostraciones son la materia prima de la matemática, y proveer dichas demostraciones es el trabajo del matemático.

¿En cuál de las escuelas nos enlistamos?

Consideremos primero un ejemplo que apunta hacia la segunda elección, y otro que apoya la primera.

Nadie mantendrá seriamente la noción según la cual el enunciado del último teorema de Fermat tiene algún interés. Si no fuera por el hecho de que la conjetura de Fermat se mantuvo sin resolver en medio de una gran variedad de otras ecuaciones Diofantinas que podían ser resueltas usando técnicas estándar, nadie se habría tomado la molestia de recordar lo que alguna vez escribió Fermat en la margen de cierto libro.

Lo que es destacable en el último teorema de Fermat es su demostración. La demostración de Wiles hace uso de una variedad impresionante de piezas distintas de la matemática: de una conjetura sin relación alguna hecha hace cincuenta años en el campo aparentemente distante de la geometría algebraica, de la teoría de funciones elípticas, una teoría originada hace mucho tiempo en el estudio del movimiento planetario, de una variedad de otras teorías trabajadas durante años con propósitos no relacionados. Las piezas del rompecabezas fueron puestas en su sitio por la magia de la demostración y dieron la clave del secreto de Fermat. La demostración del teorema de Fermat es un triunfo de la colaboración allende las fronteras y los siglos. Ningún dominio del quehacer intelectual distinto de la matemática puede reclamar tales triunfos.

Pero la magnitud del triunfo brilla en contraste fuerte con la insignificancia de la conjetura que se probó. En teoría de números, los enunciados insignificantes son de ocurrencia común. En teoría de números, el valor de un teorema depende estrictamente de la dificultad de la demostración. Realice el siguiente experimento mental. Imagínese que los teoremas de la teoría de números se volvieran repentinamente tan fáciles de demostrar como, digamos, los de geometría euclidiana en el plano. Si esto sucediera, entonces la teoría de números casi seguramente se encontraría inmediatamente relagada de su excelsa posición actual a la menos excelsa posición que indulgentemente se le confiere a la teoría de cuadrados latinos. Este experimento mental muestra de manera concluyente que la teoría de números es un campo que consiste primordialmente de demostraciones.

Como tenemos la tendencia a promulgar conclusiones generales, podríamos caer en la tentación de concluir que la historia del último teorema de Fermat es típica y que por lo tanto las demostraciones están antes que los teoremas. Podemos refutar tal conclusión al mirar hacia otro campo de la matemática: la geometría.

Grosso modo, los teoremas de la geometría expresan hechos del mundo. La información que los teoremas de la geometría proveen es valiosa de maneras impredecibles, ya que la geometría es rica en aplicaciones fuera de la matemática. La relevancia de un teorema geométrico está determinada por lo que el teorema nos dice acerca del espacio, y no por la eventual dificultad de la demostración.

La demostración del teorema de Desargues en geometría proyectiva es lo más cercano que una demostración puede llegar al ideal Zen. Puede ser resumida en una palabra: '¡Veo!'

Sin embargo, el teorema de Desargues está lejos de ser trivial, a pesar de la sencillez de su demostración. Ha tenido más aplicaciones, tanto en la geometría como por fuera de ésta, que cualquier teorema de teoría de números, tal vez más aplicaciones que todos los teoremas de la teoría analítica de números juntos.

Basados en estos dos ejemplos, ¿caemos ahora en la tentación de saltar a concluir que en geometría los teoremas son más importantes que las demostraciones, mientras que lo opuesto vale en teoría de números?

Las apariencias son engañosas, y así lo son los ejemplos anteriores. Para hacer claro el engaño, preguntémonos si la distinción formal aguda entre teorema y demostración, que nos parece invulnerable, tiene sentido.

``Pretender'' en matemática

G. H. Hardy escribió que toda demostración matemática es una forma de *desenmascarar*. Proponemos cambiar una palabra de la frase de Hardy así: toda demostración matemática es una forma de *pretender*.

En ninguna parte de las ciencias encuentra uno un vacío tan grande entre la versión escrita de un resultado matemático y el discurso requerido para entender el mismo resultado. El método axiomático de presentación de la matemática ha alcanzado en nuestro tiempo el zénit del fanatismo. Una pieza de matemáticas, de la manera como es escrito hoy en día, no puede ser entendido y apreciado sin un enérgico esfuerzo adicional. La claridad ha sido sacrificada por entelequias[1] como la consistencia de notación, la brevedad del argumento y la constreñida linearidad del argumento inferencial. Algunos matemáticos van hasta el punto de pretender que la matemática *es* el método axiomático, ni más ni menos.

Esta pretensión de 'identificar' la matemática con un estilo de exposición tiene un efecto corrosivo sobre la manera como la matemática es vista por los científicos de otras disciplinas. La impenetrabilidad de la escritura matemática ha aislado a la comunidad de matemáticos. La errada identificación de la matemática con el método axiomático ha conducido al prejuicio extendido entre los científicos de que la matemática no es más que una gramática pedante, tan sólo útil para reelaborar lo obvio y para producir contraejemplos marginales a hechos útiles que son en la mayoría de los casos ciertos.

No me entiendan mal. No estoy condenando el método axiomático. En el momento actual, no hay alternativa viable a la presentación axiomática, si se quiere establecer la veracidad de un enunciado matemático más allá de dudas razonables. Un rasgo del método axiomático se ha mantenido oculto tras bambalinas (incluso) de los ojos más inquisitivos. Al carecer de un mejor lenguaje, llamaremos a este rasgo la *intercambiabilidad entre teorema y demostración*.

Desde el punto de vista de la lógica formal, la afirmación de que teorema y demostración puedan a veces ser intercambiados sin afectar la verdad o el valor de un trozo de matemática parece exhorbitante. Todo el mundo sabe que una demostración es una sucesión de una vía de pasos lógicos que conducen a la conclusión deseada. En ese caso, ¿en qué se puede basar la afirmación absurda según la cual un teorema y su demostración son intercambiables?

Devolvámonos al último teorema de Fermat. La demostración recientemente completada de este teorema requiere un gran número de pasos intermedios. Muchos de éstos son lemas de teoría de números que requieren demostraciones sustanciosas. Algunos de estos lemas están en este momento en el proceso de acceder al estatus de genuinos teoremas nuevos de interés independiente. Realice el siguiente experimento mental. Imagine que Fermat hubiera enunciado su conjetura bajo el disfraz de cualquiera de estos lemas intermedios. El enunciado tal vez no hubiera sido tan impactante, pero si se escoge el lema con cuidado, la demostración del lema es perfectamente equivalente a la de la conjetura original. Cualquier especialista en teoría de números producirá una lista interminable de conjeturas que suenen plausibles, donde cada una es equivalente a la de Fermat y requiere un argumento totalmente equivalente al de Wiles y sus colaboradores.

Llegamos entonces a observar que el enunciado que de hecho dio Fermat a su conjetura es irrelevante para su demostración. Aunque Wiles logró demostrar la conjetura de Fermat -evento más allá de toda discusión ampliamente reportado en los medios masivos-, de hecho Wiles enfocó sus energías en demostrar algo distinto. Cualquiera de los varios lemas en la demostración de Wiles puede ser visto como un triunfo de igual magnitud a la conjetura de Fermat. Ninguna parte de la demostración se destaca como preferible a cualquier otra, excepto por razones de tradición y publicidad.

Pero si el enunciado de la conjetura de Fermat es irrelevante, entonces ¿qué sentido tiene todo este trabajo? El error está en suponer que una demostración matemática, por ejemplo la demostración del último teorema de Fermat, ha sido concebida con el propósito explícito de demostrar lo que se supone que está demostrando. Una vez más, las apariencias engañan. El valor real de lo que Wiles y sus colaboradores hicieron va mucho más allá de la mera demostración de una conjetura caprichosa. El punto central de la demostración de la conjetura de Fermat es la apertura de nuevas *posibilidades* para la matemática. Wiles y sus colaboradores mostraron que las conjeturas de Taniyama y Weil de hecho tenían el poder que se les sospechaba. Reavivan nuestra fe en el rol central de la teoría de funciones elípticas en matemática. Desarrollan una serie de nuevas técnicas que conducirán a nuevas conexiones entre la teoría de números y la geometría algebraica. Los matemáticos del futuro se beneficiarán del camino abierto por Wiles (de su demostración y sus técnicas). Encontrarán aplicaciones nuevas, aún no soñadas, de estos métodos recientes para resolver nuevos problemas, incluso problemas de gran interés práctico. El valor de la demostración de Wiles está no en lo que demuestra sino en lo que *abre*, en lo que hace posible.

Todo matemático sabe en su fuero interior que tal apertura de posibilidades es el valor real de la demostración de la conjetura de Fermat. Todo matemático sabe que la verificación por computador de la conjetura de los cuatro colores es de valor considerablemente menor que la demostración de Wiles, porque no abre ninguna posibilidad matemática significativa. Sin embargo, muchos matemáticos pretenderán que el valor de una demostración, al igual que sus posibilidades futuras, son términos no matemáticos vacíos de significado formal, y por lo tanto evitarán entrar en discusión rigurosa de los roles del valor y la posibilidad en una descripción realista de la matemática.

Proponemos por oposición que una versión rigurosa de la noción de posibilidad sea agregada al bagaje formal de la metamatemática. Uno no puede pretender ignorar la posibilidad, alegando que las posibilidades de un resultado matemático están ocultas tras los enunciados formales. Tampoco puede uno desechar la noción de posibilidad basado en que tal noción está más allá del alcance de la lógica del presente. Las leyes de la lógica no están esculpidas en piedra, eternas e inmutables.

Una visión realista del desarrollo de la matemática muestra que las *razones* para que un teorema valga se encuentran tan solo después de excavar muy a fondo y enfocar las posibilidades del teorema. El descubrimiento de esas razones ocultas es la obra del matemático. Una vez se encuentran esas razones, la escogencia de enunciados formales particulares para expresarlas es secundaria. Versiones formales diferentes pero intercambiables pueden ser dadas, y serán dadas según las circunstancias.

En la búsqueda de las razones auténticas de un fenómeno matemático, teorema y demostración juegan el papel de Twedledum y Twedledee. En este sentido podemos afirmar que teorema y demostración son intercambiables.

Ahora parecemos estar haciendo un enunciado universal basados en la evidencia del solo ejemplo de la demostración del último teorema de Fermat. ¿Qué le sucede a la tesis de la intercambiabilidad de teorema y demostración en el ejemplo del teorema de Desargues, importante pero intuitivamente evidente?

Miremos más de cerca el teorema de Desargues. El tratamiento más completo de este teorema se encuentra en el primero de seis volúmenes de los 'Principles of Geometry' de Baker. Después de un argumento que tiene bastante más de cien páginas, Baker muestra que por debajo del enunciado del teorema de Desargues está oculta una estructura geométrica mucho más interesante. Esta estructura es llamada hoy en día la configuración de Desargues. Una explicación de la configuración de Desargues en términos de teoremas y demostraciones es larga e insatisfactoria. La configuración de Desargues se entiende mejor meditando sobre una figura que muestre rectas incidentes en el plano, más de 50 rectas si no recuerdo mal. Una vez se captura intuitivamente la *Ideenkreis* de la configuración de Desargues, uno entiende las razones que se hallan ocultas bajo el enunciado del teorema de Desargues. Uno también se da cuenta que para propósitos del argumento formal, éste puede ser reemplazado por cualquiera de los varios enunciados equivalentes, algunos de estos bastante distintos, que se obtienen al inspeccionar la configuración de Desargues.

El rol del teorema de Desargues no se entendió hasta que no fue descubierta la configuración de Desargues. Por ejemplo, el papel fundamental del teorema de Desargues en la coordinatización de la geometría sintética solo puede ser entendido a la luz de la configuración de Desargues.

Por lo tanto, incluso un enunciado formal tan sencillo como el teorema de Desargues no es exactamente lo que reporta ser. El enunciado del teorema de Desargues pretende ser definitivo, pero en realidad es tan solo la punta de un iceberg de conexiones con otros hechos de la matemática. El *valor* del teorema de Desargues, y la razón por la cual el enunciado de este teorema ha sobrevivido el paso de siglos, cuando otros teoremas geométricos igualmente impactantes han sido olvidados, radica en que el teorema de Desargues abrió un *horizonte de posibilidades* que relacionan la geometría y el álgebra de maneras inesperadas.

En conclusión: lo que una presentación axiomática de una pieza de matemática *oculta* es por lo menos tan relevante al entendimiento de la matemática como lo que una presentación axiomática pretende enunciar.

¿Existen demostraciones definitivas?

Es creencia común entre matemáticos que después de que un teorema nuevo es descubierto, otras demostraciones más simples de éste aparecerán, hasta que una demostración definitiva sea hallada.

Una inspección pasajera de la historia de la matemática parece confirmar esta creencia. La primera demostración de muchos grandes teoremas es innecesariamente complicada. 'Nadie culpa a un matemático si su primera demostración de un nuevo teorema es torpe', decía Paul Erdös. Toma mucho tiempo, desde unas décadas hasta siglos enteros, que los hechos escondidos en la primera demostración sean *comprendidos*, como dicen informalmente los matemáticos. Este gradual develarse del significado de un nuevo descubrimiento toma la apariencia de una sucesión de demostraciones, cada una más sencilla que la anterior. Versiones nuevas y más sencillas de un teorema dejan de aparecer cuando los hechos son finalmente entendidos.

Desafortunadamente, los matemáticos se dejan confundir por la palabra 'comprensión' que erradamente consideran tener un significado psicológico y no lógico. Preferirían replegarse en terreno lógico familiar. Dicen que la búsqueda de razones y de un *entendimiento* de los hechos de la matemática puede ser expresada por medio de la noción familiar de sencillez. Sencillez, preferiblemente en el modo de la trivialidad, es un substituto para el entendimiento.

¿Pero es acaso la sencillez una característica del entendimiento matemático? ¿Qué sucede realmente con descubrimientos matemáticos retrabajados a lo largo de los años?

Consideremos dos ejemplos.

Ejemplo uno. La primera demostración del teorema ergódico puntual, que el viejo George David Birkhoff de Harvard encontró como respuesta a un desafío del joven John von Neumann de Princeton, era de cincuenta páginas. La demostración del mismo teorema, de hecho la demostración de una versión mucho más general, debida a Adriano Garsia en 1964, es de media página, con todos los detalles incluidos. La comprensión que logró Garsia es un ejemplo maestro de simplificación casi hasta el punto de la trivialidad.

Ejemplo dos. En los años cincuenta, Hans Lewy de Berkeley descubrió el primer ejemplo de una ecuación diferencial parcial sin soluciones de ningún tipo. En los treinta años siguientes, la idea escondida bajo el ejemplo de Lewy fue gradualmente hecha explícita hasta que la razón de esa imposibilidad se volvió completamente clara. Sin embargo, el hecho de que una ecuación diferencial parcial pueda no tener soluciones sigue siendo hoy no-trivial, a pesar de que ahora se entiendan las razones de este hecho.

En cada uno de estos ejemplos, el proceso de simplificación requirió el trabajo duro de generaciones de matemáticos. ¿Afirmaremos entonces que los matemáticos pasan su vida en búsqueda de la simplificación?

La demostración de Garsia del teorema ergódico puntual parece ser trivial, pero tan solo a posteriori. Es difícil imaginar que alguien hubiera descubierto esa demostración sin conocimiento previo de la historia del teorema.

Por otro lado, el misterioso descubrimiento de Hans Lewy fue moldeado como una nueva teoría de conmutadores de operadores diferenciales, que eventualmente develaron el punto oculto del ejemplo de Hans Lewy. La teoría es elegante y definitiva, pero dista mucho de ser sencilla.

Hay otros contraejemplos embarazosos para nuestra fe en la sencillez. Tal vez el más viejo y más dramático de estos contraejemplos es el teorema fundamental de la geometría, que se remonta a von Staudt a comienzos del siglo diecinueve, y enuncia la equivalencia entre la geometría proyectiva sintética y la analítica. Ningún progreso significativo ha sido hecho hacia la simplificación de la demostración de von Staudt. Aún hoy, una demostración completa del teorema de von Staudt no toma menos de veinte páginas, incluyendo unos cuantos lemas increíblemente sosos. Todo geómetra está vagamente al tanto de la equivalencia entre geometría proyectiva sintética y analítica; sin embargo, pocos geómetras se han tomado la molestia de mirar la demostración, mucho menos de recordarla. Garrett Birkhoff, en su tratado sobre teoría de retículos, un libro que se supone que trata precisamente de éste y otros temas relacionados, da el enunciado del teorema de von Staudt, y luego evasivamente remite al lector a una demostración de Emil Artin que fue distribuida de manera privada en formato mimeografiado en los años treinta en la Universidad de Notre Dame.

El teorema de von Staudt había sido retirado tan lejos del centro de la matemática que en los años treinta von Neumann lo redescubrió desde cero, con prácticamente la misma demostración que la de von Staudt, al desarrollar su teoría de geometrías continuas (Stan Ulam me dijo que von Neumann, al oir que von Staudt había hecho el mismo trabajo un siglo antes, tuvo una crisis depresiva). Los filósofos de la matemática han especulado que la dificultad en simplificar la demostración de von Staudt puede deberse a que la afirmación tan solo vale en dimensión 3 o mayor, mientras que en dimensión 2 una plétora de contraejemplos patológicos ha sido encontrada: los incómodos planos proyectivos no Desarguesianos.

De vez en cuando, un matemático con agallas reexhuma el teorema de von Staudt, y renueva el intento de hallar una demostración transparente. La última vez fue Mark Haiman de San Diego, quien logró dar una demostración conceptual brillante y corta, al costo de hacer una pequeña hipótesis simplificante que aún requiere una larga demostración.

Nos gustaría creer que tales instancias de teoremas que se resisten a la simplificación son raros. Afortunadamente, ningún teorema descubierto antes de 1800 está en la clase del teorema de von Staudt. La mayoría de la matemática descubierta antes de 1800, con la posible excepción de muy pocos enunciados de teoría de números, puede hoy en día ser presentada en cursos de pregrado, y no es muy descabellado calificar a tal matemática de sencilla, de una sencillez que se aproxima a la trivialidad.

Por otro lado, en el siglo veinte observamos la ocurrencia incómodamente frecuente de resultados enunciados fácilmente cuyas demostraciones ocupan centenares de páginas. Un ejemplo típico es la clasificación de los grupos finitos simples. La variedad de teoremas intermedios necesarios para esta clasificación es tan vasta que desafía los poderes mentales de todo matemático trabajando a solas. Sin embargo, la clasificación de los grupos simples finitos no es mera verificación por fuerza bruta. Los argumentos que llevan a establecer la lista completa, por largos e inaccesibles que sean, tienen el mérito de 'explicar' de manera conceptualmente satisfactoria la razón por la cual los únicos grupos finitos simples que existen son los que son. El argumento global es convincente, aunque sea imposible de seguir, y es concebible que ninguna simplificación adicional esté por venir. El ejemplo del teorema de Desargues también es intranquilizador. En este caso, lo opuesto a una simplificación ha sucedido a lo largo de los siglos. Trabajos posteriores inspirados por el teorema de Desargues han hecho que el teorema parezca más complejo que en su momento inicial.

Con el último teorema de Fermat notamos otro fenómeno. La búsqueda que los matemáticos están empezando a llevar a cabo sobre la demostración del último teorema de Fermat se propone descubrir 'qué' se está 'realmente' demostrando. Esta búsqueda mantendrá a los matemáticos ocupados durante mucho tiempo.

La vida secreta de la matemática

Hardy tenía razón después de todo: los matemáticos están ahí para desenmascarar el engaño que está escondido bajo toda demostración lógicamente correcta. Pero ellos no admitirán que su tarea es desenmascarar; en cambio, pretenderán que están ocupados demostrando nuevos teoremas y enunciando nuevas conjeturas de acuerdo con los cánones de la lógica del presente.

Todo teorema es un complejo de posibilidades ocultas. En el ejemplo del teorema de Desargues, algunas de estas posibilidades fueron finalmente sacadas a la luz por el descubrimiento de la configuración de Desargues. Detrás del ejemplo chocante de Hans Lewy de una ecuación diferencial sin soluciones acechaban muchos hechos desconocidos acerca de los operadores diferenciales. El teorema ergódico puntual impulsó a entender el rango completo de posibilidades que había sido abierto por las ideas de Lebesgue, un entendimiento que fue efectivamente explotado por la demostración de Garsia. Y la demostración del último teorema de Fermat pronostica una enorme pléyade de posibilidades matemáticas.

No parece descabellado concluir que la noción de *posibilidad* será fundamental en la futura discusión rigurosa de la naturaleza de la matemática. Aunque parezca inquietante esta perspectiva, hay otras nociones, igualmente fundamentales y preocupantes, que reclaman un tratamiento riguroso, y que los lógicos del presente aún no han admitido en su seno. Por ejemplo, las demostraciones matemáticas vienen en *tipos* distintos, que aún están por clasificar. La noción de *entendimiento*, usada en discusión informal pero desterrada de la presentación formal, tendrá que tomar su lugar bajo el sol; aún más, nuestra lógica deberá ser modificada para acomodar *grados* de entendimiento.

Finalmente, la noción de *evidencia* tendrá que obtener una posición formal que la ponga delante de la noción tradicional de verdad. Los rasgos característicos de la evidencia matemática, muchos de éllos reacios al tratamiento con lenguaje formal, tendrán que ser *adecuadamente* descritos. Algunos de estos rasgos adicionales podrían ser la noción de *valor*, de *razones*, y sobre todo, el fenómeno de *ocultamiento* de un teorema por otro teorema que ocurre en todas partes en matemática.

¿Quién se atreverá a enfrentarse a esta inmensa tarea?