La fenomenología de la belleza matemática

Gian – Carlo Rota

Mientras que pintores y músicos probablemente se avergüencen ante a los comentarios acerca de la belleza de su trabajo, los matemáticos disfrutan el entretener discusiones acerca de la belleza de las matemáticas. Los artistas profesionales enfatizan los aspectos técnicos de su trabajo en lugar de los estéticos. A los matemáticos, en cambio, les gusta hacer juicios sobre la belleza de sus piezas de matemática favoritas. Una mirada superficial nos hace ver que las características de la belleza matemática no coinciden con las de la belleza artística. Los cursos en "apreciación artística" son bastante comunes; resulta impensable encontrar cursos en "apreciación de la belleza matemática". Intentaremos develar el sentido del término "belleza", tal como es usado por los matemáticos.

¿Qué tipo de matemáticas pueden ser hermosas?

Teoremas, demostraciones, teorías matemáticas enteras, un corto paso en la prueba de un teorema, definiciones, son considerados por los matemáticos, en distintos momentos, como hermosos o feos. Con mayor frecuencia, la palabra "hermoso" se aplica a teoremas. En segundo lugar encontramos las demostraciones; una prueba que ha de ser juzgada hermosa tiende a ser corta. Se suele considerar que los teoremas hermosos son capítulos cortos, auto-contenidos, que encajan en teorías más amplias. Hay teorías complejas en cuya belleza todo matemático coincide, pero no suelen ser los ejemplos que vienen a la mente al hacer una lista de las piezas hermosas de la matemática. Las teorías que los matemáticos consideran hermosas raramente concuerdan con las que el publico educado imagina. Por ejemplo, la geometría euclídea clásica se propone a menudo por los no-matemáticos como paradigma de una teoría matemática hermosa, pero nunca he escuchado a un matemático profesional clasificarla como tal.

No es nada fuera de lo común que una definición parezca hermosa, sobre todo cuando es nueva. Sin embargo, los matemáticos son renuentes a admitir la belleza de una definición; sería interesante investigar las razones de esta renuencia. Incluso cuando no se las reconoce explicitamente como tales, las definiciones hermosas se dan a conocer por el éxito que encuentran. Una peculiaridad de las matemáticas del siglo XX es la aparición de teorías en las que las definiciones exceden con mucho en belleza a los teoremas.

La instancia más común de belleza en matemáticas la constituye un paso brillante en una prueba que por lo demás no tiene nada de especial. Todo matemático en ciernes se familiariza pronto con esta instancia de belleza matemática.

Estas instancias de belleza matemática por lo general son independientes las unas de las otras. Un teorema hermoso puede no estar bendecido con una prueba igual de hermosa; se dan con frencuencia teoremas hermosos con pruebas feas. Cuando a un teorema hermoso no tiene una prueba hermosa, los matemáticos hacen intentos por dar pruebas nuevas cuya belleza esté a la altura de la del teorema, con desigual éxito. En cambio es imposible encontrar pruebas hermosas de teoremas que no lo sean.

Ejemplos

El teorema que afirma que en tres dimensiones hay sólo cinco sólidos regulares (los sólidos platónicos) es, por lo general, considerado hermoso; sin embargo, no puede decirse que ninguna de las pruebas de este teorema, por lo menos las que conozco, sean hermosas. De manera similar, el teorema del número primo es un hermoso resultado con respecto a la distribución de los primos, pero ninguna de sus pruebas puede considerarse particularmente hermosa.

La opinión de Hardy de que mucha de la belleza de una afirmación matemática o de una demostración matemática depende del elemento sorpresa es, en mi opinión, equivocada[1]. Es verdad que la belleza de una pieza de matemáticas se percibe a menudo con una sensación de agradable sorpresa; sin embargo, se pueden encontrar resultados sorprendentes que nadie nunca ha clasificado como hermosos. El teorema de Morley, que afirma que los trisectores adyacentes de un triángulo arbitrario se encuentran en un triángulo equilatero, es incuestionablemente sorprendente, pero ni la afirmación, ni ninguna de sus pruebas, resultan hermosos a pesar de los repetidos intentos por dar pruebas eficientes. Una gran cantidad de teoremas matemáticos, cuando son publicados por primera vez, parecen sorprendentes; más o menos hace veinte años la prueba de la existencia de estructuras diferenciables no equivalentes sobre esferas de dimensión alta se consideraba sorprendente, pero a nadie se le ocurrió, ni entonces ni ahora, llamar hermoso a ese hecho.

Instancias de teoremas que son a la vez hermosos y sorprendentes abundan. A menudo esa sorpresa resulta del hecho de que se tomen ideas de otra rama de la matemática. Un ejemplo de esto es la prueba del teorema de aproximación de Weierstrass, que usa la ley de los grandes números de probabilidad.

Un ejemplo de belleza matemática en el que todos los matemáticos concuerdan es el teorema de Picard, que afirma que una función entera de una variable compleja

[1] G.F. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge U.P., 1967.

toma todos los valores con a lo sumo una excepción. El enunciado límpido de este teorema es igualado por la belleza de la prueba de cinco renglones que le dio Picard.

Los sistemas axiomáticos pueden ser hermosos. La axiomatización de Church del cálculo proposicional, que es una versión simplificada de aquella dada por Russell y Whitehead en el *Principia Mathematica*, resulta bastante hermosa. Ciertas re-elaboraciones de los axiomas de la geometría euclídea que descienden de los *Fundamentos de la Geometría*[2] de Hilbert son hermosos (por ejemplo los de Coxeter). Los axiomas originales de Hilbert eran burdos y forzados, y requirieron pulimiento; tarea que fue llevada a cabo por matemáticos durante los últimos cien años.

La axiomatización de la noción de categoría, descubierta por Eilenberg y MacLane en los cuarentas, es, aunque controversial, un ejemplo de la belleza de una definición. Dio origen a un nuevo campo, la teoría de categorías, que es rico en definiciones hermosas y llenas de intuiciones, pero pobre en demostraciones elegantes. Las nociones básicas de este campo, tales como adjunto y functor representable, categoría derivada y topos, han aguantado el paso del tiempo con su belleza. Belleza que ha influido en la forma de conducir el camino del resto de la matemática en la posterior parte del siglo. Sin embargo, no puede decirse lo mismo de sus teoremas, que siguen siendo burdos.

Un ejemplo de una teoría hermosa acerca de la cual la mayoría de matemáticos probablemente concordarán es la teoría de campos finitos, iniciada por E.H. Moore. Otro ejemplo es la teoría de ecuaciones de Galois, que invoca la, alguna vez improbable, noción de grupo de permutaciones para probar la no solubilidad por radicales de ecuaciones de grado mayor que cuatro. La belleza de esta teoría ha inspirado gran variedad de exposiciones. En mi opinión, todas ellas han fallado en transmitir toda la belleza de la teoría, incluso el famoso tratado escrito por Emil Artin en los cuarentas[3].

Este ejemplo muestra que la belleza de una teoría matemática es independiente de sus cualidades estéticas, o de su falta de ellas, de la exposición rigurosa de la teoría. Algunas teorías hermosas talvez nunca van a tener una presentación que iguale su belleza. Una instancia más de una teoría hermosa que nunca ha sido igualada en belleza en su presentación es la deducción natural de Gentzen.

Instancias de teorías matemáticas profundas en las que la belleza matemática juega un papel menor abundan. La teoría de ecuaciones diferenciales, tanto ordinarias como parciales, está llena de teoremas feos y argumentos poco elegantes. Sin embargo, la teoría ha ejercido una fuerte fascinación sobre un gran número de matemáticos, más allá de sus aplicaciones.

Pueden encontrarse también instancias de teorías mediocres de cuestionable belleza que han sido provistas de presentaciones brillantes y fascinantes. La ambivalente

[2] David Hilbert, *Die Grundlagen der Geometrie*, 7 ed, B.G. Teubner, Leipzig 1930.

[3] Emil Artin, Galois Theory, Notre Dame Mathematical Expositions, University of N.D. 1941.

bendición de una elegante presentación le dará a la teoría una belleza efímera que rara vez dura más allá del lapso de una generación o escuela de matemáticos. La teoría de la integral de Lebesgue, entendida desde el punto de vista de cien años de análisis funcional, ha recibido más presentaciones elegantes de las que merece. La geometría sintética proyectiva en el plano estuvo muy en boga entre 1850 y 1940, y se trataba de una instancia de una teoría cuya belleza es de aquellas que puede decirse que en gran medida está en los ojos del que la mira. Numerosas exposiciones de esta teoría fueron escritas por matemáticos ingleses e italianos (siendo la definitiva la que dieron los matemáticos norteamericanos Veblen y Young). Estas exposiciones rivalizaban unas con otras en la elegancia de la presentación y en la ingeniosidad de la demostración; esta materia incluso llegó a ser requisito universitario en muchos países. Visto en retrospectiva, uno se pregunta el porqué de tanto escándalo. Hoy en día, la geometría sintética es en gran medida cultivada sólo por historiadores, y un matemático promedio ignora los resultados principales de esta rama de las matemáticas alguna vez floreciente. Aquello que reclaman los defensores de la geometría sintética, es decir, que las pruebas sintéticas son más hermosas que las analíticas, es demostrablemente falso. Incluso en el siglo XIX, eran disponibles técnicas de la Teoría de Invariantes que han provisto pruebas analíticas de hechos de la geometría que son elegantes, libres de coordenadas, sin tener que recurrir a la gimnasia del razonamiento sintético y sin tener que agacharse a usar coordenadas.

Son raras las presentaciones hermosas de una teoría matemática entera. Cuando se dan, tienen una profunda influencia. El *Zahlbericht*[4] de Hilbert, el Algebra de Weber[5], el tratado sobre probabilidad de Feller, ciertos volúmenes de Bourbaki, influyen aun en las matemáticas de hoy. Uno lee y vuelve a leer estos libros con placer, incluso cuando está familiarizado con el contenido. Un trabajo de exposición de tan alto calibre es más explotado que reconocido por la comunidad matemática.

Finalmente, es fácil dar ejemplos de un paso particular en un teorema que generalmente se considera hermoso. En la teoría de anillos no conmutativos, el uso del lema de Schur ha sido visto a menudo como un hermoso paso. La aplicación del cálculo de resíduos en la teoría espectral de operadores lineales en el espacio de Hilbert es otra instancia de ese tipo. En álgebra universal, la doble caracterización de un álgebra libre en la prueba del teorema de Birkhoff sobre variedades es un ejemplo más.

La objetividad de la belleza matemática

El auge y caída de la geometría sintética muestra que la belleza de una pieza matemática depende de escuelas y periodos. Un teorema que en un contexto se

[4] David Hilbert, Die Theorie der Algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutschen Mathematikvereiningung, Vol. IV, 175-546.

[5] H. Weber, Lehrbuch der Algebra, 3 vols, Braunschweig, Vieweg, 1895-96.

considera hermoso, en otro, puede parecer trivial. El teorema de Desargues es hermoso cuando se lo ve como un enunciado de geometría proyectiva sintética pero pierde todo interés enunciado en términos de coordenadas.

Muchos casos de belleza matemática se deshacen o caen en la trivialidad con el progreso de la matemática. Sin embargo, dado el periodo histórico y el contexto, se encuentra un acuerdo sustancial entre matemáticos en cuanto a qué matemática ha de ser considerada como hermosa. Este acuerdo no es sólo la percepción de una cualidad estética que se superpone al contenido de la pieza de matemáticas. Una pieza de matemáticas cuya belleza es reconocida por todos es más susceptible de ser incluida en los curricula de las escuelas; el descubridor de un teorema hermoso será premiado mediante promociones y menciones; un argumento hermoso será imitado. En otras palabras, la belleza de una pieza de matemáticas no consiste meramente en los sentimientos subjetivos experimentados por el observador. La belleza de un teorema es una propiedad objetiva a la par con su verdad. La verdad de un teorema no se diferencia de su belleza por un grado mayor de objetividad.

La verdad matemática está provista de un caracter absoluto que pocos fenómenos distintos pueden esperar igualar. Bajo una mirada más atenta, se puede notar que este carácter definitivo debe ser atenuado. La dependencia de la verdad matemática en la demostración resulta ser su talón de Aquiles. Una demostración que pasaría los actuales estándares de rigor puede dejar de ser considerada rigurosa por generaciones futuras. Toda la teoría sobre la que un teorema depende puede llegar a probarse incompleta en una fecha posterior. Los estándares de rigor y relevancia son dependientes del contexto, y cualquier cambio en estos estándares lleva a un cambio concomitante en la posición de una afirmación matemática aparentemente atemporal.

Consideraciones similares se aplican a la belleza matemática. La belleza matemática y la verdad matemática comparten la propiedad fundamental de la objetividad, y la de ser inescapablemente dependientes del contexto. La belleza matemática y la verdad matemática, como cualquier otra característica de la matemática, están sujetas a las leyes del mundo real, a la par que las leyes de la física. La dependencia del contexto es la más primera y básica ley de este tipo.

Una digresión hacia palabras-recompensa

Una psicóloga que conozco recibió una subvención para estudiar la manera en que los matemáticos trabajan. Ella decidió que la creatividad juega un papel crucial en matemáticas. Se dio cuenta de que un estimado de la creatividad matemática sucede en momentos cruciales de su carrera. Mediante la observación de matemáticos en ejercicio fue llevada a formular una teoría de la creatividad matemática, y diseñó maneras de medirla. Describió cómo en ciertos individuos la creatividad se va desvaneciendo en ciertos momentos. Bosquejó maneras de aumentar la creatividad.

En su reporte final hizo la recomendación a sus patrocinadores de que los estudiantes de matemáticas deberían, en algún momento de sus carreras, tener como requisito inscribir algún curso de creatividad. Algunos rectores universitarios tomaron en serio su consejo y procedieron a contratar los profesores adecuados.

Nuestra amiga estaba seriamente equivocada. Es imposible encarar la creatividad matemática del modo que sugería. Es imposible medir o enseñar creatividad por la simple razón de que "creatividad" es una palabra que no tiene un contenido identificable. Sólo se puede caracterizar un artículo matemático como "creativo" una vez se lo ha comprendido. De todas maneras resulta imposible producir por comisión un artículo matemático "creativamente escrito". "Creatividad" es aquello que proponemos llamar una "palabra-recompensa", una palabra que promete un beneficio que no puede ser controlado ni medido, y que puede obtenerse como el subproducto impredecible de una actividad concreta e identificable.

Otros ejemplos de palabras-recompensa son: "felicidad", "santidad" y "belleza matemática". De igual manera que la felicidad y la creatividad, la belleza matemática no puede ser enseñada o buscada; de todas maneras, un matemático dará con un enunciado hermoso o con una hermosa prueba en un momento impredecible. El error que cometió mi amiga puede denominarse "el error de la recompensa", que consiste en darle un contenido medible a una palabra recompensante.

Es poco probable que un matemático cometa el "error de la recompensa" con respecto a la belleza matemática. Juzgar una pieza matemática sobre la base de su belleza es un negocio peligroso. En primer lugar, son pocos los teoremas o demostraciones acerca de los cuales existe un acuerdo sobre su belleza. En segundo lugar, la investigación matemática no va en busca de la belleza. Todo matemático sabe que la belleza no puede ser buscada *directamente*. Los matemáticos trabajan para resolver problemas y para inventar teorías que brindarán nueva luz, y no para producir hermosos teoremas o demostraciones bonitas.

Incluso en la enseñanza de las matemáticas la belleza juega un rol menor. Una clase puede ser conducida hasta el punto en que los estudiantes lleguen a apreciar un resultado hermoso. Sin embargo, es muy probable que los intentos por despertar interés por parte del salón de clase basados en la belleza del contenido matemático terminen actuando en contra. Los estudiantes pueden ser impresionados favorablemente por la elegancia de la presentación de un profesor, pero raramente pueden ser conscientizados de su belleza. Apreciar la belleza matemática requiere familiaridad con la teoría, y a tal familiaridad se llega a costa de tiempo, esfuerzo, ejercicio, y *Sitzfleish*[6], en lugar de por un entrenamiento en apreciación estética.

Existe una diferencia entre la belleza matemática y la elegancia matemática. Aunque no se puede luchar por alcanzar la belleza matemática, la elegancia en la presentación sí puede obtenerse. Al preparar una conferencia los matemáticos con frecuencia escogen acentuar la elegancia, y triunfan al conseguir presentar el

[6] gastar asiento [NT]

material de manera que todos concuerden en reconocerla. La elegancia matemática tiene que ver con la presentación, y sólo tangencialmente con el contenido. Un teorema hermoso – por ejemplo, la demostación de Hermann Weyl del teorema de la equidistribución – ha sido presentado de maneras elegantes y poco elegantes. Ciertos matemáticos elegantes nunca han producido un teorema hermoso.

La fealdad matemática

Puede ayudarnos a comprender la belleza matemática considerar su opuesto. La ausencia de belleza en una pieza de matemáticas sucede a menudo, y es una motivación para continuar la investigación. La ausencia de belleza está relacionada con ausencia de definitividad. Una demostración hermosa, las más de las veces, es una prueba definitiva (si bien una prueba definitiva no necesariamente es hermosa); resulta improbable que un teorema hermoso sea mejorable, aunque a menudo es un motivo para el desarrollo de teorías definitivas donde podría encajar.

La belleza raramente está asociada con el trabajo pionero. La primera prueba de un teorema difícil raramente es hermosa.

Extrañamente, a los matemáticos no les gusta admitir que mucha de la investigación matemática consiste precisamente en pulir y refinar enunciados y demostraciones de resultados conocidos. Sin embargo, una mirada superficial a cualquier revista de investigación matemática confirmará este estado de cosas.

Los matemáticos raramente utilizan la palabra “feo”. En su lugar están términos tan dispares como “torpe”, “alrevesado”, “oscuro”, “redundante” y, en el caso de las demostraciones, “técnico”, “auxiliar”, “sin sentido”. Pero la expresión más usual de desagrado es la pregunta retórica: “¿Y esto para qué sirve?”

Noten lo absurdo de esa pregunta. La mayoría de resultados en matemáticas puras, incluso los más profundos, no sirven para nada. En vista de tal ausencia de aplicación, la ocurrencia de la pregunta despectiva, “¿Y esto para qué sirve?” resulta desconcertante. Ningún matemático que plantee esta pregunta retórica acerca de un teorema matemático en realidad está pididendo una lista de aplicaciones. ¿Cuál es entonces el sentido de esta pregunta? Al analizar las motivaciones ocultas de la pregunta “¿Y esto para que sirve?” nos acercaremos al sentido oculto de la belleza matemática.

El error de la bombilla

La belleza de una pieza de matemáticas se asocia frecuentemente con la brevedad del enunciado o de la demostración. ¡Cómo desearíamos que todas las piezas de matemáticas compartieran la elegante inmediatez del teorema de Picard! Este deseo es raramente satisfecho. Una gran cantidad de hermosos argumentos son de largo aliento y requieren una extensa preparación previa. Familiaridad con una inmensa cantidad de material de transfondo es la condición para entender matemáticas. Una demostración es vista como hermosa sólo después de que le hace ver a uno las más torpes demostraciones anteriores.

A pesar del hecho de que la mayoría de las pruebas son largas, a pesar de nuestra necesidad de un vasto transfondo, recordamos las instancias en que percibimos la belleza matemática como si hubiesen sido percibidas en un momento de bendición, en un instantáneo flash como el de una bombilla que hubiese sido encendida de repente. El esfuerzo puesto en la comprensión de la demostración, el material de fondo, las dificultades encontradas desenmarañando la intrincada secuencia de inferencias, se deshacen y desaparecen mágicamente en el momento en que nos hacemos conscientes de la belleza del teorema. El doloroso proceso de aprendizaje se desvaneces de la memoria y sólo el flash de iluminación permanece.

Quisiéramos que la belleza matemática consistiera en ese flash; la belleza matemática *debería* ser apreciada con la instantaneidad de una bombilla siendo encendida. Sin embargo, sería un error pretender que la apreciación de la belleza matemática consista en lo que vanagloriosamente sentimos que debe ser, es decir, en un instantáneo flash. Si bien esta negación de la verdad factual ocurre con mucha frecuencia.

El "error de la bombilla" a menudo se toma como paradigma en la enseñanza de las matemáticas. Olvidadizos de nuestros dolores de aprendizaje, exigimos de nuestros estudiantes ese flash de entendimiento para cada argumento que presentamos. Peor aún, confundimos a nuestros estudiantes al tratar de convencerlos de que tales flashes de entendimiento son el núcleo de la apreciación matemática.

Se han hecho intentos de reunir hermosos resultados matemáticos y presentarlos en libros con títulos tan atractivos como *Los cien más hermosos teoremas de la matemática*. Tales antologías raramente se encuentran en la biblioteca de un matemático.

La belleza de un teorema se observa mejor cuando el teorema se presenta como la joya de la corona en el contexto de una teoría. Pero cuando teoremas matemáticos de áreas dispersas son reunidos y presentados como "perlas", es probable que sólo sean apreciados por los que ya están familiarizados con ellos.

El concepto de belleza matemática

La clave para comprender el sentido oculto de la belleza matemática está en el "error de la bombilla". El fuerte contraste entre el esfuerzo requerido para poder apreciar la belleza matemática y la visión imaginaria que los matemáticos idolatran de una percepción de la belleza como dada por un flash es el *Leitfaden* que nos ha de llevar a descubrir aquello en lo que consiste la belleza matemática.

Los matemáticos están preocupados por la verdad. En matemáticas, sin embargo, existe una ambigüedad en el uso de la palabra "verdad". Esta ambigüedad puede ser observada siempre que los matemáticos reclaman que la belleza es la *raison d'être* de la matemática, o que la belleza matemática es ese rasgo que le da a la matemática un rango único entre las ciencias. Estas pretensiones son tan viejas como la matemática, y nos llevan a sospechar que la verdad matemática y la belleza matemática deben estar relacionadas.

La belleza matemática y la verdad matemática comparten una propiedad importante. Ninguna de las dos admite grados. A los matemáticos les fastidia la verdad por grados que observan en las otras ciencias.

Los matemáticos preguntan: "¿Para qué sirve?" cuando quedan desconcertados por un enunciado matemático, y no porque no puedan seguir la prueba o sus aplicaciones. Más bien lo contrario. Lo que sucede es que el matemático ha podido verificar su verdad en el sentido lógico del término, pero aún algo falta. El matemático que está perplejo y pregunta "¿Para qué sirve" no ha captado el sentido del enunciado que ha sido verificado como verdadero. La verificación sola no nos da la clave del rol que juega el enunciado dentro de la teoría; no nos explica la relevancia del enunciado. En pocas palabras, la verdad lógica del enunciado no nos *ilustra* acerca del *sentido* del enunciado. La *ilustración*[7] y no la verdad es lo que el matemático busca cuando pregunta: "¿Para qué sirve?". La *ilustración* es un razgo de la matemática acerca del que se ha escrito muy poco.

La propiedad de *ilustrar* se atribuye de manera objetiva a ciertos enunciados matemáticos y se le niega a otros. El que un enunciado matemático *ilustre* o deje de hacerlo puede ser sujeto de discusión entre matemáticos. Cada profesor de matemáticas sabe que los estudiantes no habrán aprendido sólo con asir la verdad formal del enunciado. Los estudiantes deben ser *ilustrados* por el sentido del enunciado, o se retirarán. El *ilustrar* es una cualidad de los enunciados matemáticos que uno a veces percibe y a veces no, como la verdad. Un teorema matemático puede ser *ilustrante* o no, así como puede ser verdadero o falso.

[7] Hemos hecho aquí una difícil escogencia de traducción ante el término *Enlightment*. Para el verbo *to enlight* hay dos opciones que en casos particulares parecen ser más adecuadas: aclarar, iluminar. Sin embargo para entender el sentido que le da Rota creo que es necesario mantener un mismo término. Sin duda puede tender a la confusión usar ilustración que suele estar asociada a un uso técnico de *enlightment* distinto del que aquí se trata. Si bien con seguridad la escogencia de ese término en ese caso (la Ilustración) con seguridad estaba motivado por razones acordes a las mías. Aclarar parece hablar sólo del sujeto y no tanto de la luz que proviene del objeto. Con la iluminación pasa un poco lo contrario, si bien hablamos de ser iluminado en un sentido análogo al que estamos tratando aquí. Pero esa cercanía resulta ir en contra de nuestras intenciones desviando hacia una intepretación "mágica" del suceso que está lejos de lo que Rota quiere presentar. A veces van a sonar extrañas las oraciones, pedimos intentar concentrarse en el sentido que se le está dando aquí a la palabra. Si bien en el original deja de aparecer en cursivas, hemos decidido dejarlas todas así para que se tenga en cuenta la particularidad del uso del término.

Si los enunciados de la matemática fuesen formalmente verdaderos pero no *ilustraran* en ninguna medida, las matemáticas serían un curioso juego que jugarían seres extraños. Esa *ilustración* es lo que mantiene viva la empresa matemática y le da a la matemática un alto estatus entre las disciplinas científicas.

Los matemáticos raramente reconocen de manera explícita el fenómeno de la *ilustración* por al menos dos razones. Primero, al contrario que la verdad, la *ilustración* no puede ser formalizada fácilmente. Segundo, la *ilustración* admite grados: unos enunciados son más *ilustradores* que otros. A los matemáticos no les gustan los conceptos que admiten grados, y llegarán tan lejos como sea posible para negar el rol lógico de tal concepto. La belleza matemática es la expresión que los matemáticos han inventado para admitir oblicuamente el fenómeno, a la vez que se evita el reconocimiento de su naturaleza difusa. Ellos dicen que un teorema es hermoso cuando quieren decir que es *ilustrante*. Reconocemos la belleza de un teorema cuando vemos cómo el teorema "cuadra" en su lugar, cómo dispersa luz a su alrededor, como una *Lichtung*, un claro en el bosque. Decimos que una prueba es hermosa cuando brinda el secreto del teorema, cuando nos conduce a percibir la inevitabilidad del enunciado demostrado. El término "belleza matemática", junto con el "error de la bombilla", es un truco que los matemáticos han ideado para evitar enfrentarse con el enredado fenómeno del *ser ilustrado*. La confortable idea instantánea de la belleza matemática nos salva de tener que tratar con un concepto que viene por grados. Hablar de belleza matemática es un salvoconducto que nos libra de confrontar el *ilustramiento*, un salvoconduco ideado con el fin de mantener nuestra descripción de la matemática tan cercana como sea posible de la descripción de un mecanismo. Esto constituye un paso dentro de la idolatrada actividad de los matemáticos, la de construir un mundo perfecto inmune al enredo del mundo diario, un mundo donde lo que pensamos que *debe ser* verdadero resulta *ser* verdadero, un mundo libre de las desilusiones, de las ambigüedades, de los fracasos del otro mundo en que vivimos.