El Barbero de Sevilla, o la precaución inútil

Gian-Carlo Rota, David Sharp, Robert Sokolowski.[1]

Querido profesor Spalt,

Muchas gracias por sus comentarios a nuestro artículo acerca de la identidad de los ítems matemáticos. Quisiéramos delinear una posible respuesta a sus argumentos.

Estamos completamente de acuerdo con usted en que los ítems matemáticos no tienen nada de la substancialidad de los ítems del día a día, y estamos de acuerdo también en un cien por ciento con su afirmación de que los ítems matemáticos no son meras substancias, son meros *relata*. Nunca se ha pasado por nuestras cabezas asignar "substancialidad" a los ítems matemáticos. También concordamos con su afirmación de que los ítems matemáticos de hoy son dados de manera relacional como sistemas axiomáticos. Pero se debe distinguir entre la forma de darse los ítems matemáticos y la identidad de los ítems matemáticos. Es verdad, como usted bien dice, que los conceptos matemáticos son definidos por sistemas relacionales. Pero sería un error identificar estos ítems con los sistemas relacionales que son usados para definirlos. Puedo definir el triángulo de muchas maneras; sin embargo, ninguna definición del triángulo es lo mismo que el "ítem" triángulo. Hay muchas maneras de definir la recta real, pero todas estas definiciones definen algo *más*, algo que sin embargo es distinto de las relaciones que se usan para definirlo, y que está provisto de una identidad propia.

No estamos de acuerdo con su afirmación de que la forma ideal de conocimiento en matemáticas teóricas es el teorema (y su demostración). Lo que creemos verdadero es que el teorema (y su demostración) es la forma ideal de *presentar* las matemáticas. Es, en nuestra opinión, incorrecto identificar la forma de presentar las matemáticas con las matemáticas mismas. Seríamos presuntuosos al creer que el sistema axiomático, del que estamos tan orgullosos, es la manera definitiva de presentar el conocimiento matemático.

Su pregunta retórica: "¿Qué capta una captación preaxiomática?" puede ser respondida con un ejemplo histórico. Cauchy no tenía ninguna definición rigurosa de la recta real o de la integral. Sin embargo, lo que escribió acerca de la recta real y la integral aún se considera válido y ha sido adoptado en los sistemas axiomáticos rigurosos de la recta real y la integral ideados por Dedekind y Riemann. ¿Cómo es posible incorporar los resultados de Cauchy acerca de la recta real en el sistema axiomático de Dedekind sin tener una captación preaxiomática de hecho de que ambos matemáticos están tratando con la *misma* recta real?

Wiener axiomatizó la ley de grupos al tomar xy^{-1} como la operación básica, y su

1Respuesta a una carta del Profesor Spalt donde criticaba el contenido del artículo: "*Sintaxis, semántica y el problema de la identidad de los ítems matemáticos.*"

axiomatización es bastante diferente de cualquiera de los otros sistemas axiomáticos para los grupos. Sin embargo, "nunca ha engañado a nadie" llevándolos a creer que aquello de lo que Wiener habla es algo distinto de un grupo. ¿Cómo sabemos que las axiomatizaciones de la recta real mediante cortes de Dedekind y como campo ordenado arquimediano completo describen la misma recta real? La respuesta dada por algunas personas a esta pregunta, a saber, que podemos proyectar cada sistema axiomático en otro, no es honesta. Hacemos esta proyección sólo después de habernos dado cuenta de que los dos sistemas axiomáticos describen la misma noción.

Esto nos lleva al eje de nuestros desacuerdos, que está en el uso que usted hace de "psicológico". Usted escribe, "... esto sólo capta el tópico psicológico de motivación (por usar el lenguaje pedagógico usual) o de deseo (por usar un lenguaje filosófico moderno)." Y después: "Para resumir... Rota/Sokolowski/Sharp ilícitamente mezclan un tópico psicológico y matemático..."

Nosotros creemos que el uso que usted hace de "psicológico" en estos contextos es incorrecto. ¿Qué podría significar esta palabra? Los psicólogos nunca han tratado con estos temas, y nunca lo harán. ¿Quiere decir que los asuntos con que tratamos dependen del capricho individual? Claramente no, ya que de otra manera sería imposible discutirlos. ¿Quiere decir que los problemas con los que tratamos son "mentales"? Pero toda la matemática es mental.

Lo que usted llama psicológico nosotros lo llamamos filosófico. Motivación y deseo son componentes esenciales del razonamiento matemático. No tenemos más derecho a rechazar estos aspectos de la matemática como "puramente psicológicos" que el que tendríamos de rechazar los resultados de Cauchy sobre la integración como "puramente heurísticos," porque no consiguió darles una axiomatización plena. Rechazar como psicológico algo que no es explicable axiomáticamente es una manera de deshacerse de problemas incómodos. El sistema axiomático, a pesar de sus ventajas sobre otros métodos para la presentación de las matemáticas, viene con una ingenuidad de fábrica, como si un sistema axiomático pudiese dar existencia a las nociones que están siendo definidas. Los matemáticos trabajan como si las nociones matemáticas surgieran *ursprünglich* de los axiomas. Algunos filósofos de las matemáticas, incluso los más grandes, han rechazado como "psicológico" cualquier cosa que amenace esta apariencia.

Usted escribe: "Es equivocado (hoy) reclamar que existan ítems matemáticos más allá de cualquier sistema axiomático". No podemos ni estar de acuerdo ni en desacuerdo con esta afirmación. Concordamos con que no hay manera de tratar rigurosamente con los ítems matemáticos sino mediante sistemas axiomáticos. Pero esto es como decir que no hay forma de comunicar ideas sino mediante palabras. Aunque toda idea ha de ser expresada en oraciones, la misma idea puede ser expresada por oraciones completamente diferentes. Una idea es "independiente" ("independiente" es una palabra peligrosa, pero no encontramos una mejor) de las palabras que se usen para expresarla. Cuando afirmamos que un ítem matemático es "independiente" de cualquier sistema axiomático particular, queremos decir "independencia" en un sentido muy similar al de la independencia de las ideas del lenguaje.

En este punto es tentador sacar como conclusión que nosotros estamos asumiendo que los ítems matemáticos "existen" independientemente de los sistemas axiomáticos. Esto no es lo que queremos decir. Usted escribe: "Todo el que comienza a hablar de ítems matemáticos 'liberados' de cualquier sistema axiomático debe explicar lo que entiende por existencia." En eso está equivocado. Al discutir las propiedades de los "ítems matemáticos", no estamos obligados a tomar posición acerca de la "existencia" de los ítems matemáticos. La identidad no presupone la existencia.

Usted está repitiendo un prejuicio muy difundido. La discusión acerca de la existencia de los ítems matemáticos ha proseguido por años. Algunos pensadores respetables han mantenido que los ítems matemáticos existen (en algún sentido un otro); otros igual de respetables han argumentado que no existen. El resultado final es que la opinión que ha hecho carrera es que no importa si los ítems matemáticos existen o no, y probablemente tienen poco sentido hacer la pregunta.

Haga el siguiente *Gedankenexperiment*: imagine que alguien probó fuera de toda duda razonable que los ítems matemáticos no existen (pero que siguen siendo consistentes). ¿Usted cree que tal prueba afectaría la verdad de algún resultado matemático? Ciertamente no. Su afirmación, "Decir que hay algo que es el mismo ítem axiomatizado (como Rota/Sharp/Sokolowski lo hacen) inevitablemente presupone que existen ítems para los cuales es posible proponer que son idénticos" está equivocada. Uno puede pasar una vida entera haciendo matemáticas sin nunca tener idea de si un ítem matemático existe o no; uno ni siquiera tiene que preocuparse por tal cuestión. La existencia de los ítems matemáticos es un capítulo en la historia de la filosofía de la matemática que no tiene consecuencias. No le objetamos nada a quien quiera preocuparse por la existencia. *Jedem Tierchen, sein Pläsirchen*. Las discusiones acerca de la "existencia" son motivadas por antojos emocionales de permanencia que son de interés psiquiátrico más que filosófico. Verificar la existencia de algo es como pedir permiso para proceder sin darse cuenta que no hace falta pedir permiso. La comedia de la existencia matemática podría titularse como la bien conocida ópera, *El Barbero de Sevilla, o la Precaución Inútil*.