INTODUCCIÓN A LA TEORÍA PCF

Rafael Benjumea

15 Nov 2004

El presente tarbajo pretende dar un bosquejo general de la prueba de existencia de κ^+-escalas para todo κ cardinal singular, existencia que resulta interesante ya que es la pieza fundamental para la construcción en **ZFC** de un espacio de Dowker de tamaño $\aleph_{\omega+1}$, adicionalmente posee conexiones con la existencia de $\square_\kappa$ y principios de reflexión simultanea. Para esta prueba es necesario hacer un recorrido por las definiciones y resultados básicos de la teoría **pcf** de Shelah; presentaremos además otra de las aplicaciones más importantes de esta teoría:

$$2^{\aleph_0} < \aleph_\omega \Rightarrow \aleph_\omega < \aleph_{\omega_4}.$$

0.1 Introducción

La teoría **pcf**(posibles cofinalidades) creada por Shelah a finales de los años 80 surgió con la idea de encontrar leyes que determinaran el comportamiento de la exponenciación cardinal, y así poder avanzar en el sueño de resolver el primer problema de Hilbert, es decir la hipótesis del continuo (CH). El primer gran paso fué generalizar el teorema de Galvin-Hajnal, la herramienta más poderosa conocida hasta entonces para trabajar en artmética cardinal.

0.1 Teorema. *Si $\aleph_\eta$ es un singular tal que $\kappa = cf(\aleph_\eta) > \omega$ y $\aleph_\eta$ es $\aleph_0$-fuerte, entonces para todo cardinal λ tal que $\kappa \leq \lambda < \aleph_\eta$, tenemos*

$$\aleph_\eta^\lambda < \aleph_{(|\eta|^\lambda)^+}.$$

donde κ es μ-fuerte ssi $\rho^\mu < \kappa$ para todo cardinal $\rho < \kappa$.

Las consecuencias de este teorema en exponenciación cardinal son diversas y nos permiten tener varias cotas relevantes, por ejemplo:

1. Si $\aleph_\eta$ es límite fuerte ($2^\mu < \aleph_\eta \ \forall \mu < \aleph_\eta$), entonces
$$2^{\aleph_\eta} < \aleph_{(2^{|\eta|})^+}.$$
2. Si además $\eta < \aleph_\eta$, entonces
$$2^{\aleph_\eta} < \aleph_{\aleph_\eta}.$$

Nótese además que si δ es un punto fijo de la función aleph, es decir $\delta = \aleph_\delta$ el teorema también se tiene, pues si λ es un cardinal, entonces $\aleph_\delta^\lambda = |\delta|^\lambda < \aleph_{(|\delta|^\lambda)^+}$.
Generalizar este teorema, es decir dejar de lado las hipótesis de cofinalidad no contable y ser $\aleph_0$-fuerte, es el primero de muchos resultados de la teoría **pcf**, y es más interesante aún si notamos que todos estos resultados se desarrollan en ZFC.

0.2 Definición y propiedades básicas de pcf(A)

Una pregunta que surge naturalmente cuando se conoce el teorema de Galvin-Hajnal es: ¿Cuándo se tiene el resultado o alguna cota similar para $\aleph_\eta^\lambda$, donde $\aleph_\eta$ es un cardinal de cofinalidad contable, en particular para $\aleph_\omega$?. Esta generalización de Galvin-Hajnal fué el objetivo principal de la teoría **pcf**, para esto Shelah introduce el operador -pcf- que asigna a cada conjunto A de cardinales regulares y a cada cardinal μ el conjunto de cardinales regulares $\mathrm{pcf}_\mu(A)$, que cumple las siguientes propiedades:

1. $A \subseteq \mathrm{pcf}_\mu(A)$.
2. $\min(A) = \min \mathrm{pcf}_\mu(A)$
3. $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{pcf}_\mu(A) \subseteq \mathrm{pcf}_\mu(B)$.
4. $\mathrm{pcf}_\mu(A \cup B) = \mathrm{pcf}_\mu(A) \cup \mathrm{pcf}_\mu(B)$.

Nótese que estas propiedades se asemejan mucho a las propiedades de una clausura. De hecho podríamos ver al operador -pcf- como una clausura sobre un conjunto de cardinales y generar entonces una topología que resultaría ser compacta. Además, si el conjunto A es tal que $|A| = \omega$, por ejemplo $A = \{\aleph_n\}_n$, la topología tendría carácter contable. El lector interesado en este tratamiento puede consultar cap IX de [15].

Definición

Dado un orden parcial $(M, <_M)$ decimos que $B \subseteq M$ es **cofinal** en M ssi para todo $m \in M$ existe un $b \in B$ con $m <_M b$. La cofinalidad de un orden parcial, notada $\mathrm{cf}(M, <_M)$, es el cardinal del conjunto más pequeño que es cofinal en M. Decimos que $(M, <_M)$ tiene ***verdadera cofinalidad*** si este tiene un subconjunto $B \subseteq M$ totalmente ordenado que es cofinal. En este caso podemos hallar un cardinal regular λ y una sucesión $\langle m_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle$ que sea cofinal en M. Note que la verdadera cofinalidad no siempre existe, piense por ejemplo en un conjunto con dos elementos maximales. Cuando la verdadera cofinalidad existe y es igual a λ lo notaremos $\mathrm{tcf}(M, <_M) = \lambda$.

En nuestro caso particular, **productos reducidos de conjuntos pequeños de cardinales regulares**, sea A un conjunto de cardinales regulares, I un ideal sobre A y $g \in Ord^A$, entonces $\mathrm{tcf}(\prod g/I) = \lambda$ ssi λ es un cardinal regular y existe una sucesión $<_I$-creciente $\boldsymbol{f} = \langle f_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ en $\prod g$ que es cofinal en $\prod g/I$. Donde para cualquier relación R sobre un conjunto A, I un ideal sobre A definimos el cuasi-orden R_I como

$$f \ R_I \ g \text{ ssi } \{a \in A \mid \neg(f(a) \, R \, g(a))\} \in I$$

Dado un ideal I sobre A, y una función ordinal $g \in Ord^A$, estamos interesados en la existencia y valor de la verdadera cofinalidad de $\prod g/I$. Así en las siguientes secciones estudiaremos el conjunto

$$\mathrm{pcf}(g) = \{\mathrm{tcf}(\prod g/I) \mid \ I \text{ es un ideal sobre } dom(g)\}$$

de las verdaderas cofinalidades de una función ordinal *progresiva*, es decir una función g tal que $(\mathrm{cf}(g(a)) > |A| \ \forall a \in A = dom(g))$.

En el resto del presente trabajo A denotará un conjunto de cardinales regulares. Decimos entonces que A es *progresivo* ssi $A = \emptyset$ o bien $|A| < \min(A)$, con esto pasemos a nuestra definición principal.

0.2 Definición. Sea $g \in Ord^B$ una función ordinal. Definimos el conjunto de **posibles cofinalidades de g** como

$$\mathrm{pcf}(g) = \{\mathrm{tcf}(\prod g/I) \mid \ I \text{ es un ideal sobre } B\}$$

Si A es un conjunto de cardinales regulares, notamos $\mathrm{pcf}(A) := \mathrm{pcf}(id_A)$ donde id_A es la función identidad sobre A, esto es

$$\mathrm{pcf}(A) = \{\mathrm{tcf}(\prod A/I \mid I \text{ es un ideal sobre } A\}.$$

En general, definimos para todo cardinal μ

$$\mathrm{pcf}_\mu(A) := \bigcup\{\mathrm{pcf}(B) \mid B \in [A]^{\leq\mu}\};$$

así $\mathrm{pcf}(A) = \mathrm{pcf}_{|A|}(A)$.

Es claro que en la definición de **pcf** sólo aparecen aquellos ideales para los que $\mathrm{tcf}(A/I)$ existe, ya que no siempre es así. El siguiente lema dará una solución parcial a este inconveniente y determinará la forma de continuar examinando las posibles cofinalidades de un producto.

0.3 Lema. *Sea B un conjunto no vacío de cardinales, $g \in Ord^B$ una función ordinal progresiva y sea $A=$ rango de $(cf \circ g)$. Entonces*

$$pcf(g) = pcf(cf \circ g) = pcf(A) = \{cf(\prod A/D) \mid D \ es\ un\ ultrafiltro\ sobre\ A\}.$$

Entre otras cosas, el lema nos dice que es suficiente considerar funciones tales que su recorrido es la clase de los cardinales regulares.

Con la anterior caracterización podemos demostrar fácilmente algunas de las propiedades básicas del operador **pcf** en el siguiente

0.4 Lema. *Sea $\mu > 0$ cualquier cardinal. Entonces tenemos lo siguiente.*

1. $\sup \mathrm{pcf}_\mu(A) \leq (\sup(A))^\mu$.
   Sea $\lambda \in \mathrm{pcf}_\mu(A)$. Entonces existen $B \subseteq A$ con $|B| \leq \mu$, un ultrafiltro D sobre B y una sucesión $\langle f_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ cofinal en $\prod B$ módulo D. Esta sucesión claramente es inyectiva, pues es creciente, así tenemos que
   $$\lambda \leq |\prod B| \leq (\sup(A))^\mu.$$

2. $A \subseteq \mathrm{pcf}_\mu(A)$.
   Sea $\lambda \in A$ y consideremos el ultrafiltro principal D sobre A generado por $\{\lambda\}$, si definimos
   $$f_\xi(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \neq \lambda, \\ \xi & \text{si } \nu = \lambda \end{cases}$$
   para $\xi < \lambda$ y $\nu \in A$, entonces la sucesión $\langle f_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ es cofinal en $\prod A$ módulo D. Así $\mathrm{cf}(\prod A/D) = \lambda$.

3. *Si A es finito, entonces* $\mathrm{pcf}_\mu(A) = A$.
   Se sigue fácilmente de lo anterior, ya que todo ultrafiltro sobre un conjunto finito es principal.

4. $\mathrm{pcf}_\mu(A) \cap \min(A) = \emptyset$.
   Sea $\lambda < \min(A)$. Supongamos que D es un ultrafiltro sobre un subconjunto no vacío B de A tal que $|B| \leq \mu$, y $\langle f_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ es una sucesión cofinal en $\prod B$ módulo D. Como cada uno de los miembros de B son cardinales regulares, la ecuación $g(\nu) = \sup\{f_\xi(\nu) + 1 \mid \xi < \lambda\}$, para $\nu \in B$, define una función $g \in \prod B$ que satisface $f_\xi < g$ para todo $\xi < \lambda$. Por lo tanto la sucesión $\langle f_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ no es cofinal en $\prod B$ lo que prueba la afirmación.

5. *Si A no tiene un máximo y D es un ultrafiltro no acotado sobre A, esto es un ultrafiltro que no contiene un subconjunto acotado de A, entonces*
   $$\mathrm{cf}(\prod A/D) \geq \sup(A).$$
   Debemos ver que cualquier sucesión $\langle f_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ de elementos en $\prod A$ no puede ser cofinal si $\lambda < \sup(A)$. En estas condiciones definamos
   $$g(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \leq \lambda, \\ \sup\{f_\xi(\nu) + 1 \mid \xi < \lambda\} & \text{si } \nu > \lambda \end{cases}$$

para todo $\nu \in A$, entonces

$$\{\nu \in A \mid f_\xi(\nu) < g(\nu)\} = A \cap (\lambda, \sup(A))_{reg} \in D,$$

pues es el complemento de $A \cap [\min(A), \lambda]_{reg}$, es decir $f_\xi <_D g$ para todo $\xi < \lambda$, por lo tanto $\langle f_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ no puede ser cofinal en $\prod A$ módulo D.

6. *Si* $B \subseteq A$ *entonces* $\mathrm{pcf}(B) \subseteq \mathrm{pcf}(A)$.
   Esto se tiene debido a que todo ultrafiltro D sobre B puede ser extendido a un ultrafiltro D' sobre A, y los ultraproductos $\prod B/D$ y $\prod A/D'$ son los mismos.

7. *Para cualquier par de conjuntos* A y B, $\mathrm{pcf}(A \cup B) = \mathrm{pcf}(A) \cup \mathrm{pcf}(B)$.
   Sea $\lambda \in \mathrm{pcf}(A \cup B)$, y D un ultrafiltro sobre $A \cup B$ con ultraproducto de cofinalidad λ, entonces o bien $A \in D$ o $B \in D$ (o ambos) por lo tanto $\lambda \in \mathrm{pcf}(A)$ o $\lambda \in \mathrm{pcf}(B)$. La otra inclusión se tiene usando el hecho anterior.

0.3 Algunas sucesiones importantes

Esta sección nos introduce a las definiciones y lemas técnicos de mayor importancia en la teoría **pcf**, entre estas definiciones podemos encontrar las de $\kappa - escalas$, sucesiones de adivinanza de clubs (closed and unbounded) y otras sucesiones con propiedades adicionales que nos permitiran establecer la existencia de *escalas*.

Definición.
La noción más importante con la que trabajaremos aquí es la de cota superior exacta, veamos su definición. Supongamos que F es un conjunto no vacío de funciones en Ord^A tales que para toda $f \in F$ existe $f' \in F$ *con* $f <_I f'$. Entonces $h \in Ord^A$ es ***cota superior exacta*** (cse) de F si h es mínima cota superior y para toda $g <_I h$ existe $f \in F$ *con* $g <_I f$. Es decir si $F \subseteq \prod h/I$ entonces h es una cota superior exacta de F ssi F es cofinal en $\prod h/I$.

Nótese que si por ejemplo A es cualquier conjunto progresivo de cardinales regulares, esto es $|A| < \min A$, y $\boldsymbol{f} = \langle f_\xi \mid \xi < |A| \rangle$ es una sucesión de funciones en $\prod A$ no decrecientes en la relación $\leq$ (es decir la relación tomada sobre todo el dominio común de las funciones f_ξ), entonces el $\sup(\boldsymbol{f}) = \sup\{f_\xi(a) \mid a \in A\}$ es mínima cota superior para $\boldsymbol{f}$, pero esto no quiere decir que para cualquier función $h < \sup(\boldsymbol{f})$ exista f_ξ tal que $h < f_\xi$.

La existencia de cse requiere un poco más de trabajo y nuevas definiciones que nos alejarían mucho de la intención de estas notas, por lo tanto omitiremos su prueba. Empecmos con algunas definiciones.

0.5 Definición (Fuertemente creciente). Supongamos I ideal sobre A y $\boldsymbol{f} = \langle f_\xi \mid \xi \in L\rangle$ una sucesión de funciones $f_\xi \in Ord^A$, donde L es un conjunto de ordinales. Entonces $\boldsymbol{f}$ se dice *fuertemente creciente*, si existen conjuntos nulos $Z_\xi \in I$, para $\xi \in L$, tales que si $\xi_1 < \xi_2 \in L$

$$a \in A \setminus (Z_{\xi_1} \cup Z_{\xi_2}) \Rightarrow \; f_{\xi_1}(a) < f_{\xi_2}(a).$$

Note que si para una sucesión $\boldsymbol{f} = \langle f_\xi \mid \xi \in L\rangle$ tenemos que

$$\sup\{f_\alpha \mid \alpha \in L \cap \xi\} <_I f_\xi, \tag{1}$$

entonces $\boldsymbol{f}$ es fuertemente creciente.

0.6 Lema. *Supongamos que $\boldsymbol{h} = \langle h_\xi \mid \xi \in L\rangle$ es fuertemente creciente y $f_\xi \in Ord^A$ es tal que*

$$h_\xi <_I f_\xi \leq_I h_{\xi+1} \textit{ para todo } \xi \in L.$$

Entonces $\langle f_\xi \mid \xi \in L\rangle$ también es fuertemente creciente.

Demostración. Sea $Z_\xi \in I$ para $\xi \in L$ conjuntos nulos que atestiguan que la sucesión h es fuertemente creciente. Para toda f_ξ entre h_ξ y $h_{\xi+1}$, por definición de $<_I$, existe un conjunto $W_\xi \in I$ tal que

$$h_\xi(a) < f_\xi(a) \leq h_{\xi+1}(a) \; \forall a \in A \setminus W_\xi.$$

Definamos $Z^\xi = W_\xi \cup Z_\xi \cup Z_{\xi+1} \in I$, y si $\xi_1 < \xi_2$ están en L, entonces para toda $a \in A \setminus (Z^{\xi_1} \cup Z^{\xi_2})$

$$f_{\xi_1}(a) \leq h_{\xi_1+1}(a) \leq h_{\xi_2}(a) < f_{\xi_2}(a).$$

□

0.7 Definición. Supongamos I ideal sobre A, λ cardinal regular, y $\boldsymbol{f} = \langle f_\xi \mid \xi \in \lambda\rangle$ una sucesión $<_I$-creciente de funciones $f_\xi \in Ord^A$, donde $|A| < \lambda$. Para cualquier κ tal que $|A| < \kappa \leq \lambda$ denotemos con $(*)_\kappa$ la siguiente propiedad crucial de κ *y* $\boldsymbol{f}$:

$(*)_\kappa$ $\forall X \subseteq \lambda$ no acotado, $\exists X_0 \subseteq X$ de tipo de orden κ, tal que $\langle f_\xi \mid \xi \in X_0\rangle$ es fuertemente creciente.

Así $(*)_\kappa$ es una especie de partición que afirma que cualquier subsucesión no acotada $\boldsymbol{f'} = \langle f_\xi \mid \xi \in X\rangle$ contiene una subsucesión fuertemente creciente de longitud κ.

Ahora será presentado un teorema que relaciona fuertemente los conceptos que ya se han visto, y que es de gran utilidad para el desarrollo de resultados posteriores.

0.8 Teorema. *Suponga I ideal sobre A, $\lambda > |A|^+$ un cardinal regular, y $\boldsymbol{f} = \langle f_\xi \mid \xi \in \lambda \rangle$ una sucesión de funciones $<_I$-creciente en Ord^A. Entonces para todo cardinal regular κ tal que $|A|^+ \leq \kappa \leq \lambda$ las siguientes condiciones son equivalentes,*

1. *$(*)_\kappa$ se tiene para $\boldsymbol{f}$.*
2. *La sucesión $\boldsymbol{f}$ tiene una cota superior exacta g, y además*

$$\{a \in A \mid cf(g(a)) < \kappa\} \in I.$$

Presentaremos ahora una versión de un principio combinatorio de gran importancia para el desarrollo del presente trabajo, aunque su uso no se haga explicito en las siguientes pruebas. Daremos aquí su prueba en detalle, pues sumado a lo que ya mencionamos este es uno de los pocos principios combinatorios probables en ZFC.

0.9 Teorema. *(Club Guessing)(Adivinanza de clubs)Para todo cardinal regular κ, si λ es un cardinal con cf$(\lambda) \geq \kappa^{++}$. Entonces el conjunto estacionario $S^\lambda_\kappa = \{\delta < \lambda \mid \text{cf}(\delta) = \kappa\}$ tiene una sucesión de adivinanza de clubs. Esto es, una sucesión $\langle C_\delta \mid \delta \in S^\lambda_\kappa \rangle$ tal que*

1. *$C_\delta \subseteq \delta$ es un club (cerrado y acotado) de tipo de orden κ.*
2. *Para todo club $D \subseteq \lambda$ existe $\delta \in D \cap S^\lambda_\kappa$ tal que $C_\delta \subseteq D$.*

Demostración. Probaremos primero el teorema para κ's no contables.
Fijemos $\langle C_\delta \mid \delta \in S^\lambda_\kappa \rangle$ con $C_\delta \subseteq \delta$, club de tipo de orden κ. Sea E cualquier club en λ definamos

$$C \mid E = \langle C_\delta \cap E \mid \delta \in S^\lambda_\kappa \cap E' \rangle$$

donde $E' = \{\delta \in E \mid E \cap \delta \textit{ es no acotado en } \delta\}$ es el conjunto de puntos de acumulación de E. Entonces $E' \subseteq E$ es un club en λ, pues por construcción es cerrado, veamos ahora que es no acotado; sea $\rho < \lambda$, como E es no acotado en λ, existe $\delta_0 < \lambda$ en E por encima de ρ, elijamos $\delta_i \;\; i < \omega$ una sucesión creciente de elementos en E, sea $\delta = \sup \delta_i$, luego $\delta \in E$, dado que E es cerrado, y así $E \cap \delta$ es no acotado y $\lambda > \delta > \rho$, además $\delta \in E'$ que es lo que se quería.

Hecho *$C_\delta \cap E$ es un club en δ.*
Probemos que es cerrado; sea δ_i una sucesión acotada en $C_\delta \cap E$, como C_δ es cerrado $\sup \delta_i \in C_\delta$ y similarmente para E, $\sup \delta_i \in E$, así el $\sup \delta_i \in C_\delta \cap E$ y es menor que δ. Para ver que es no acotado, tomemos $\rho < \delta$ como C_δ es no acotado, existe $\delta_0 \in C_\delta$ tal que $\rho < \delta_0 < \delta$, además como E también es no acotado, existe $\epsilon_1 \in E$ tal que $\delta_0 < \epsilon_1 < \lambda$, pero $\underline{\delta \in S^\lambda_\kappa \cap E'}$ por lo tanto $\epsilon_1 < \delta$, de esta manera podemos construir

una sucesión de tamaño ω tal que $\rho < \delta_0 < \epsilon_1 < \delta_2 < \dots \quad \dots < \delta$, nombremos δ' el supremo de esta sucesión, dado que $\mathrm{cf}(\delta) > \aleph_0$ tenemos que $\delta' < \delta$ y esta en $C_\delta \cap E$.$\dashv$

Mostraremos ahora que para algún club $E \subseteq \lambda$, $C \mid E$ es una sucesión de adivinanza de clubs (el teorema pide una sucesión definida sobre todo $\delta \in S^\lambda_\kappa$, pero ésta es obtenida fácilmente si es definida sobre un club intersectado con S^λ_κ, ya que la intersección de dos clubs en λ sigue siendo club en λ, en particular para E'). Para probar esto, supongamos que es falso, y que para todo club $E \subseteq \lambda$ existe algún club $D_E \subseteq \lambda$ que no es "adivinado" por $C \mid E$. Es decir, $\forall \delta \in S^\lambda_\kappa \cap E'$

$$C_\delta \cap E \nsubseteq D_E.$$

Definamos entonces una sucesión decreciente (bajo inclusión) de clubs $E^\alpha \subseteq \lambda$ para $\alpha < \kappa^+$ por inducción sobre α como sigue:

1. $E^0 = \lambda$
2. si $\rho < \kappa^+$ es un ordinal límite, y E^α para $\alpha < \rho$ ya ha sido definido entonces $E^\rho = \bigcap\{E^\alpha \mid \alpha < \rho\}$, y claramente es un club en λ pues es la intersección de $< \kappa^+$ clubs en λ y $\mathrm{cf}(\lambda) \geq \kappa^{++}$.
3. Si E^α ha sido definido entonces $E^{\alpha+1} = (E^\alpha \cap D_{E^\alpha})'$. Así para todo $\delta \in S^\lambda_\kappa \cap E^{\alpha+1}$, $C_\delta \cap E^\alpha \nsubseteq E^{\alpha+1}$. De lo contrario $C_\delta \cap E^\alpha \subseteq D_{E^\alpha}$ y entonces este último sería "adivinado".

Sea $E = \bigcap\{E^\alpha \mid \alpha < \kappa^+\}$. De nuevo este es un club en λ, porque $\mathrm{cf}(\lambda) > \kappa^+$.

Ahora, para obtener un contradicción tomemos cualquier $\delta \in S^\lambda_\kappa \cap E$, como los E^α son $\subseteq$-decrecientes la sucesión $C_\delta \cap E^\alpha$ se debe estabilizar para algún $\alpha < \kappa^+$, es decir $C_\delta \cap E^{\alpha+1} = C_\delta \cap E^\alpha = C_\delta \cap E$, de lo contrario podríamos encontrar una colección de elementos de tamaño κ^+ de un conjunto de tamaño κ (pues $|C_\delta| = \kappa$). Pero como $\delta \in S^\lambda_\kappa \cap E^{\alpha+1}$, $C_\delta \cap E^\alpha \nsubseteq E^{\alpha+1} \rightarrow\leftarrow$. $\square$

Para $\kappa = \aleph_0$, es suficiente verificar que $C'_\delta = \langle C'_\delta(n) \mid n < \omega\rangle$ es un club en δ donde

$$C'_\delta(n) = \max(E \cap (C_\delta(n) + 1))$$

para algún club $E \subseteq \lambda$, y la prueba se sigue igual que antes con $C \mid E = \langle C'_\delta \mid \delta \in S^\lambda_{\aleph_0} \cap E'\rangle$. Pero ver esto no es difícil, por ejemplo veamos que es no acotado: tomemos $\rho < \delta$, como C_δ es club, existe $C_\delta(n) \in C_\delta$ con $\rho < C_\delta(n) < \delta$, por un razonamiento similar y como $\delta \in S^\lambda_{\aleph_0} \cap E'$ existe $\epsilon_0 \in E$ tal que $\rho < C_\delta(n) < C_\delta(n) + 1 \leq \epsilon_0 < \delta$, así $\rho < C'_\delta(n) < \delta$ para algún $n < \omega$.

La adivinanza de clubs es usada para probar el siguiente lema, y este se utiliza para generar sucesiones que satisfacen $(*)_\kappa$.

0.10 Lema. *Suponga que:*

1. *I es un ideal sobre A.*

2. *κ y λ son cardinales regulares tal que $|A| < \kappa < \kappa^{++} < \lambda$.*

3. *$\boldsymbol{f} = \langle f_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ es una sucesión de funciones en Ord^A que es $<_I$-creciente y satisface lo siguiente:*
   Para todo $\delta < \lambda$ con cf(δ) $= \kappa^{++}$ existe $E_\delta \subseteq \delta$ club tal que para algún $\delta' \geq \delta$ en λ
$$\sup\{f_\alpha \mid \alpha \in E_\delta\} \leq_I f_{\delta'}.$$

Entonces $(*)_\kappa$ se tiene para $\boldsymbol{f}$.

Una típica aplicación del anterior lema es el siguiente resultado

0.11 Lema. *Sea I un ideal propio sobre un conjunto de cardinales regulares A tal que $|A| < \min(A)$. Si $\lambda > |A|$ es un cardinal regular tal que $\prod A/I$ es **λ-dirigido** (es decir todo subconjunto de $\prod A$ de cardinalidad menor que λ es acotado por algún elemento de $\prod A$ en la relación $\leq_I$), y si $\langle g_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ es cualquier sucesión en $\prod A$, entonces existe una sucesión $<_I$-creciente $\boldsymbol{f} = \langle f_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ en $\prod A$, tal que $\forall \xi < \lambda$ $g_\xi < f_{\xi+1}$ y $(*)_\kappa$ se tiene para $\boldsymbol{f}$ para todo regular κ tal que $\kappa^{++} < \lambda$ y $\{a \in A \mid a \leq \kappa^{++}\} \in I$.*

Demostración. Vamos a definir una sucesión $<_I$-creciente por inducción sobre λ de la siguiente forma. En los pasos sucesor, si f_ξ ya ha sido definido, sea $f_{\xi+1}$ cualquier función en $\prod A$ que $<$-extiende a f_ξ y a g_ξ. En los pasos límite $\delta < \lambda$ existen dos casos:

1. cf(δ) $= \kappa^{++}$. Entonces fijemos algún club $E_\delta \subseteq \delta$ de tipo de orden cf(δ), y definamos
$$f_\delta = \sup\{f_i \mid i \in E_\delta\}.$$
   Entonces $f_\delta(a) < a$ cuando $a > \kappa^{++}$ (a es regular), y así $f_\delta \in \prod A/I$ dado que $\{a \in A \mid a \leq \kappa^{++}\} \in I$.

2. Si $\delta < \lambda$ pero cf(δ) $\neq \kappa^{++}$, entonces sea $f_\delta \in \prod A$ cualquier $\leq_I$-cota superior de $\langle f_\xi \mid \xi < \delta \rangle$, cota que existe por ser el producto λ-dirigido.

Ahora el lema anterior nos garantiza que $(*)_\kappa$ se tiene para todo κ de la forma requerida. $\square$

Definamos ahora las ***escalas*** y probemos su existencia.
Dado el ideal $J^{bd}(A) = \{X \subseteq A \mid \exists \beta \in A \wedge X \subseteq \beta\}$ de los conjuntos acotados de A y un cardinal singular κ, decimos que una sucesión $\boldsymbol{f} = \{f_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\}$ tal que:

1. $\boldsymbol{f}$ es $<_{J^{bd}}$-creciente.

2. $\boldsymbol{f}$ es cofinal en $\prod A$.

es una $\kappa^+ - escala$. Es decir κ^+ es la verdadera cofinalidad de este producto reducido por el ideal de los subconjuntos acotados de A. Por lo tanto probaremos el siguiente teorema.

0.12 Teorema. *(Representación de μ^+ como verdadera cofinalidad) Sea μ un cardinal singular con cofinalidad no contable. Entonces existe un club $C \subseteq \mu$ tal que*

$$\mu^+ = tcf(\prod C^{(+)}/J^{bd})$$

donde $C^{(+)}$ es el conjunto de sucesores de los cardinales de C, y J^{bd} es el ideal de subconjuntos acotados de $C^{(+)}$.

Demostración. Sea C_0 cualquier club de cardinales en μ, tal que $|C_0| = \mathrm{cf}(\mu)$ y todos lo cardinales en C_0 están por encima de $\mathrm{cf}(\mu)$. Veamos que $\prod C_0^{(+)}/J^{bd}$ es μ-dirigido, de hecho, también es μ^+-dirigido. Suponga $F \subseteq \prod C_0^{(+)}$ tiene cardinalidad $\delta_0 < \mu$ y definamos $g(a) = \sup\{f(a) \mid f \in F\}$ para todo $a \in C_0^{(+)}$ tal que $a > \delta_0$, así $g(a) \in a$ (pues a es regular y no puede ser igual al supremo sobre δ_0 de elementos menores que a), y $g(a)$ se puede definir arbitrariamente sobre los a's acotados. Esto prueba que todo conjunto en $\prod C_0^{(+)}$ de tamaño menor que μ es $<_{J^{bd}}$-acotado por g. Pero ahora podemos mostrar que los subconjuntos de $\prod C_0^{(+)}$ de cardinalidad μ también son acotados, ya que cualquier conjunto de estos se puede descomponer como $F = \bigcup_{\alpha<\mathrm{cf}(\mu)} F_\alpha$ donde cada F_α tiene cardinalidad $< \mu$, entonces acotemos cada F_α y después acotemos la sucesión de cotas. Así $\prod C_0^{(+)}/J^{bd}$ es μ^+ dirigido y por el lema anterior podemos construir una sucesión $<_{J^{bd}}$-creciente $\boldsymbol{f} = \langle f_\xi \mid \xi < \mu^+\rangle$ en $\prod C_0^{(+)}$ tal que $(*)_\kappa$ se tiene para todo regular $\kappa < \mu$.

El teorema **0.8** implica que $\boldsymbol{f}$ tiene una cota superior exacta $h \in \prod C_0^{(+)}$ tal que

$$\{a \in C_0^{(+)} \mid \mathrm{cf}(h(a)) < \kappa\} \in J^{bd} \tag{2}$$

para todo regular $\kappa < \mu$. Podemos suponer que $h(a) \leq a$ para todo $a \in C_0^{(+)}$, dado que claramente la identidad es cota superior para $\boldsymbol{f}$.

Hecho El conjunto $\{\alpha \in C_0 \mid h(\alpha^+) = \alpha^+\}$ contiene un club.
Demostración Supongamos que no, que para algún conjunto estacionario $S \subseteq C_0$, $h(\alpha^+) < \alpha^+$ para todo $\alpha \in S$. Entonces por el teorema de *Fodor* existe un conjunto estacionario S' en μ tal que $h(a) = \eta < \eta^+ < \mu$ para toda $a \in S'$ por lo tanto,

como en particular S' es no acotado, $\mathrm{cf}(h(a))$ estará acotada por η^+ para un conjunto $S' \notin J^{bd}$, lo que contradice (**2**).$\dashv$

Así, se ha probado la existencia de un club $C \subseteq C_0$ tal que $h(\alpha^+) = \alpha^+$ para toda $\alpha \in C$. Por lo tanto $\mu^+ = \mathrm{tcf}(\prod C^{(+)}/J^{bd})$ ya que $h \restriction C^{(+)}$, que es la función identidad, es una cota superior exacta para la sucesión $\langle f_\xi \restriction C^{(+)} \mid \xi < \mu^+ \rangle$ que es $<_{J^{bd}}$-creciente y de longitud μ^+. $\square$

El caso $\mathrm{cf}(\mu) = \aleph_0$ requiere una pequeña variación al final y el uso del lema **0.3**. Como caso particular de lo anterior podemos obtener una $\aleph_{\omega+1}$-escala que se utiliza para obtener un espacio de Dowker de tamaño $\aleph_{\omega+1}$.

0.4 $\aleph_{\omega_4}$???

En esta última sección daremos un bosquejo general de la existencia de la cota $\aleph_{\omega_4}$ sobre $\aleph_\omega^{\aleph_0}$. Para esto es necesario establecer las propiedades estructurales del operador **pcf**. Definimos el ideal

$$J_{<\lambda}(A) = \{X \subseteq A \mid \mathrm{pcf}(X) \subseteq \lambda\}.$$

En otras palabras, $X \in J_{<\lambda}(A)$ ssi para todo ultrafiltro D sobre A tal que $X \in D$, $\mathrm{cf}(\prod A/D) < \lambda$. Esto es, X "fuerza" que las cofinalidades de sus ultraproductos estén por debajo de λ. Este ideal nos permitirá caracterizar los elementos que pertenecen a $\mathrm{pcf}(A)$, así entre otras cosas podremos mostrar que:

1. $|\mathrm{pcf}_\mu(A)| \quad \leq \quad |(A)|^\mu$
2. Si A es un conjunto progresivo de cardinales regulares, entonces el conjunto $\mathrm{pcf}(A)$ posee un elemento máximo.
3. Sea A un intervalo progresivo de cardinales regulares. Entonces $\mathrm{pcf}(A)$ es de nuevo un intervalo de cardinales regulares.

Con "algo" más de trabajo logramos mostrar que

$$|\mathrm{pcf}(A)| < |A|^{+4}.$$

De ahí el cuatro que aparece en nuestro teorema.

Realicemos un mapa de la prueba del siguiente teorema:

0.13 Teorema. *Si δ es un ordinal límite, entonces*

$$\aleph_\delta^{|\delta|} < \max\{\aleph_{|\delta|^{+4}}, (2^{|\delta|})^+\}.$$

Demostración. Necesitamos el siguiente lema que también es la pieza fundamental para probar la generalización del teorema de Galvin-Hajnal.

0.14 Lema. *Sean $\aleph_\delta$ un cardinal límite y μ un cardinal infinito. Además supongamos que α es un ordinal menor que δ tal que $\aleph_\alpha$ es μ-fuerte,(es decir, $\rho^\mu < \aleph_\alpha$ para todo cardinal ρ menor que $\aleph_\alpha$) y $A = [\aleph_\alpha, \aleph_\delta)_{reg}$ un intervalo progresivo de cardinales regulares. Entonces*

$$\aleph_\delta^\mu < \aleph_{\alpha+|pcf_\mu(A)|^+}.$$

Con esto tenemos que:
Si $\aleph_\delta \leq 2^{|\delta|}$, entonces $\aleph_\delta^{|\delta|} \leq 2^{|\delta|}$. Así, supongamos que $2^{|\delta|} < \aleph_\delta$. Entonces $(2^{|\delta|})^+ < \aleph_\delta$ (δ es ordinal límite), por lo tanto $A = [\aleph_\alpha, \aleph_\delta)_{reg}$ es un intervalo progresivo de cardinales regulares, donde $\aleph_\alpha = (2^{|\delta|})^+$. Por el lema tenemos que $\aleph_\delta^{|\delta|} < \aleph_{\alpha+|\mathrm{pcf}_\delta(A)|^+}$. Ahora $|\mathrm{pcf}(A)| < |A|^{+4}$ y como $|A| \leq |\delta|$ tenemos que $\mathrm{pcf}_{|\delta|}(A) = \mathrm{pcf}_{|A|}(A) = \mathrm{pcf}(A)$, además $\alpha < \delta$, $\alpha + |\delta|^{+4} = |\delta|^{+4}$, así $\aleph_\delta^{|\delta|} < \aleph_{|\delta|^{+4}}$ $\square$

En particular

$$2^{\aleph_0} < \aleph_\omega \quad \Rightarrow \quad \aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_4}.$$

Una conclusión que podemos sacar del teorema anterior, es la regularidad de $\aleph_\omega^{\aleph_0}$, pues bajo la suposición de que $\min(A)^{|A|} < \sup(A)$ podemos mostrar que $\max \mathrm{pcf}(A) = |\prod A|$, así en el caso particular $A = \{\aleph_n\}_{n\geq 1}$, y si suponemos $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ tenemos que $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1 . \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1 . 2^{\aleph_0}$, entonces, dado que $|\prod A| = \aleph_\omega^{\aleph_0}$ este será realizado como el $\max \mathrm{pcf}(A)$ y por lo tanto es regular.

Bibliografía

[1]

[2] Holz, M., Steffens, K., Weitz, E.,*Intoduction to Cardinal Arithmetic*, Birkhauser, 1999.

[3] Dowker, C.H,*On countably paracompact spaces*, Canad .J Math. 3 (1951), 219-224.

[4] Jech, Thomas, *Singular Cardinals and PCF Theory*, Preprint.

[5] Jech Thomas, *Set Theory*, second edition, Springer 1997.

[6] Kojman, Menachem, *The A,B,C of PCF: a companion to pcf theory, part 1*, 1995.

[7] Kojman, Menachem, Shelah, Saharon, *A ZFC Dowker Space in* $\aleph_{\omega+1}$*: an application of pcf theory to topology*, 1995 (Publ N° 609).

[8] Kunen, Kenneth, *Studies in Logic and the foundations of mathematics*, Vol 102, North-Holland 1990.

[9] Rudin, M. E, *A normal space* X *for wich* $X \times I$ *is not normal*, Fund. Math. 73 (1971) 189-186.

[10] Shelah, Saharon, *The Generalized Continuum Hypothesis Revisited* 1998(Publ N° 460).

[11] Shelah, Saharon, *Clasification Theory and the Number of Non-isomorphic Models*, Springer, Berlin 1990.

[12] Shelah, Saharon, *You Can Enter Cantor's Paradise*, 2001.

[13] Shelah, Saharon, *Cardinal Arithmetic for Skeptics*, 1993 (Publ N° 400B).

[14] Shelah, Saharon, *Further Cardinal Arithmetic*, Israel Journal of Mathematics, Vol 95, 1996.

[15] Shelah, Saharon, *Cardinal Arithmetic*, Oxford University Press, 1994.

[16] Shelah, Saharon, Zilber, Boris *Applications of PCF Theory*, Journal of Symbolic Logic, Vol 65, Number 4, Dec 2000.