NOCIONES BÁSICAS SOBRE PREGEOMETRÍAS

PEDRO H. ZAMBRANO R-

RESUMEN. En este escrito veremos algunas nociones básicas sobre pregeometrías, que van a ser utilizadas dentro de la charla "Construcciones de Hrushovski y clases no elementales", dada dentro del curso "Tópicos avanzados de lógica", dirigido por el profesor Andrés Villaveces en el perido II - 2004, en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia.

1. PREGEOMETRÍAS Y ALGUNAS NOCIONES BÁSICAS

Notación 1.1. Sean A, B conjuntos. La unión $A \cup B$ es denotada por AB. Si a es un elemento de un conjunto C, denotamos por Aa a la unión $A \cup \{a\}$.

Notación 1.2. Sea X un conjunto. Denotamos $[X]^{<\omega} := \{B \in \mathcal{P}(X) \mid |B| < \aleph_0\}$. Adicionalmente, $A \subseteq_{finito} X$ quiere decir que $A \in [X]^{<\omega}$

Definición 1.3. Sea L un lenguaje de primer orden, $\mathfrak{A}$ una L-estructura y $A \subseteq |\mathfrak{A}|$. Decimos que $a \in acl(A)$ si y solo si existe $\varphi(x, \bar{y})$ L-fórmula, $\bar{b} \in A$ (abusando del lenguaje) y $n < \omega$ tales que $\mathfrak{A} \models \varphi(a; \bar{b}) \wedge \exists^{\leq n} x \varphi(x; \bar{b})$. El conjunto $acl(A)$ es denominado la *clausura algebraica de A*.

Intuitivamente, dentro de un modelo, un elemento a está en la clausura de A si es "solución" de una fórmula con parámetros en A y dicha fórmula solo tiene un número finito de "soluciones". En el contexto de los espacio vectoriales, esto es análogo a que a sea combinación lineal de elementos de A.

Definición 1.4. Sea T una teoría en un lenguaje L de primer orden. Decimos que T es *fuertemente minimal* si y solo si en toda estructura $\mathfrak{A} \models T$ todo definible es finito o cofinito.

Hecho 1.5. *Sean T una teoría de primer orden fuertemente minimal y $\mathfrak{A} \models T$. La función $acl : \mathcal{P}(|\mathfrak{A}|) \to \mathcal{P}(|\mathfrak{A}|)$ definida anteriormente satisface las siguientes propiedades:*

Fecha: Noviembre de 2004.

El autor está parcialmente financiado por la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia.

A1 $acl(X) = \bigcup\{acl(Y) : Y \in [X]^{<\omega}\}$ *(carácter finito)*
A2 $X \subseteq acl(X)$ *(monotonía (1))*
A3 $acl(acl(X)) = acl(X)$ *(idempotencia de $acl(X)$)*
A4 *Si* $a \in acl(Xb)\backslash acl(X)$ *entonces* $b \in acl(Xa)$ *(intercambio)*

Los lectores interesados en la prueba de este hecho pueden remitirse a [Ho].

Nótese que este operador satisface algunas propiedades similares a las que presenta la clausura algebraica en cuerpos algebraicamente cerrados y las que tiene el espacio generado por un subconjunto dentro de un espacio vectorial

La siguiente definición es una generalización del anterior concepto, pero desde un punto de vista conjuntista.

Definición 1.6. Sean G un conjunto y $cl : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$. Decimos que (G, cl) es una pregeometría si:
A1 $cl(X) = \bigcup\{cl(Y) : Y \in [X]^{<\omega}\}$ (carácter finito)
A2 $X \subseteq cl(X)$ (monotonía (1))
A3 $cl(cl(X)) = cl(X)$ (idempotencia de $cl(X)$)
A4 Si $a \in cl(Xb)\backslash cl(X)$ entonces $b \in cl(Xa)$ (intercambio)

Algunas consecuencias inmediatas que podemos describir son las siguientes.

Lema 1.7 (monotonía (2))**.** *Sea (G, cl) una pregeometría. Si $A \subseteq B \subseteq G$, entonces $cl(A) \subseteq cl(B)$.*

Demostración. Sea $a \in cl(A)$, luego existe $A' \in [A]^{<\omega}$ tal que $a \in cl(A')$ en virtud del carácter finito de cl. Como $A' \subseteq A \subseteq B$, entonces tenemos que $a \in cl(B)$ en virtud del carácter finito de cl. Por lo tanto, $cl(A) \subseteq cl(B)$. □

Lema 1.8 (transitividad)**.** *Si (G, cl) es una pregeometría y $X, Y \subseteq G$ son tales que $X \subseteq cl(Y)$ entonces $cl(X) \subseteq cl(Y)$*

Demostración. Sea $a \in cl(X)$, luego existe $X' \in [X]^{<\omega}$ tal que $a \in cl(X')$ (por el carácter finito de cl). Como $X' \subseteq X \subseteq cl(Y)$ y en virtud de lema 1.7 tenemos que $a \in cl(cl(Y))$. Pero como $cl(cl(Y)) = cl(Y)$ (en virtud de la idempotencia de cl), entonces $a \in cl(Y)$. Por lo tanto, $cl(X) \subseteq cl(Y)$. □

A continuación daremos algunos ejemplos de pregeometrías.

Ejemplo 1.9. Sea T una teoría fuertemente minimal y $\mathfrak{A} \models T$. Tenemos que $(|\mathfrak{A}|, acl)$ es una pregeometría (hecho 1.5), donde acl es la clausura algebraica definida en $|\mathfrak{A}|$.

Observación 1.10. Siendo T una teoría fuertemente minimal y $\mathfrak{A} \models T$, notemos que si $B \subseteq |\mathfrak{A}|$ y $a \in |\mathfrak{A}|$, el hecho de que $a \notin acl(B)$ es tipo-definible, pues esto es equivalente a que para toda tupla finita $\overline{b} \subseteq B$, toda $L(\mathfrak{A})$-fórmula $\varphi(x, \overline{y})$ (donde $\overline{y}$ y $\overline{b}$ tengan la misma longitud) y todo $n < \omega$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi(a, \overline{b}) \to \exists^{>n} x\varphi(x; \overline{b})$. Siendo un poco más explícitos, un elemento $a \in |\mathfrak{A}|$ realiza el tipo
$p(z) := \{\varphi(z, \overline{b}) \to \exists^{>n} x\varphi(x; \overline{b}) \mid \varphi(z, \overline{y}) \in Fmla(L(T)), l(\overline{y}) = l(\overline{b}),$
$\overline{b} \in B, n < \omega\}$
si y solo si no está en $acl(B)$.

Ejemplo 1.11. Dado un conjunto X, tenemos que $(X, id_{\mathcal{P}(X)})$ es una pregeometría.

Algunas definiciones, como veremos a continuación, están inspiradas en las nociones análogas que se tienen en el contexto de los espacios vectoriales.

Definición 1.12. Sean (G, cl) una pregeometría y $X \subseteq G$. Decimos que X es *cerrado* si $X = cl(X)$.

Definición 1.13. Sean (G, cl) una pregeometría y $X \subseteq G$ un cerrado. Decimos que $Y \subseteq X$ es una *base* para X si es minimal tal que $cl(Y) = X$.
Decimos que $Y \subseteq G$ es *independiente* si es una base para $cl(Y)$.

A continuación presenteremos algunas caracterizaciones de estas nociones, donde la prueba de estos hechos son bastante similares a las que se tienen en el contexto de los espacios vectoriales.

Hecho 1.14. *Sean (G, cl) una pregeometría y $X \subseteq G$. X es independiente ssi para todo $a \in X$ tenemos que $a \notin cl(X \backslash \{a\})$.*

Hecho 1.15. *Sean (G, cl) una pregeometría y $X \subseteq G$ un cerrado. $Y \subseteq X$ es una base para X si y solo si es independiente tal que $cl(Y) = X$.*

Hecho 1.16. *Sean (G, cl) una pregeometría y $X \subseteq G$ un cerrado. $Y \subseteq X$ es una base para X si y solo si es maximal dentro de los subconjuntos de X que son independientes.*

El siguiente resultado generaliza el hecho de que, en los espacios vectoriales, de un conjunto generador de un espacio vectorial podemos obtener un conjunto independiente que también genera dicho espacio. Su prueba es similar a la demostración de la existencia de bases en los espacios vectoriales.

Hecho 1.17. *Sean (G, cl) una pregeometría, $X \subseteq G$ un cerrado y $Y \subseteq G$ tal que $cl(Y) = X$. Entonces existe $W \subseteq Y$ que es base para X*

Notación 1.18. No es difícil demostrar que si A y B son bases para $cl(X)$ entonces $|A| = |B|$. Dicho cardinal se denomina *cl-dimensión* de X y se denota usualmente por $d(X)$. El prefijo *cl* se puede omitir si es claro qué función *cl* se está considerando.

El siguiente es un hecho bastante conocido en el contexto de las pregeometrías.

Hecho 1.19. *Sean (G, cl) una pregeometría, $X, Y \subseteq G$ y d la respectiva cl-dimensión. d satisface las siguientes propiedades:*

1. $d(X) \leq |X|$
2. *(submodularidad)* $d(XY) + d(X \cap Y) \leq d(X) + d(Y)$.
3. *(monotonía) Si* $X \subseteq Y$ *entonces* $d(X) \leq d(Y)$.

Definición 1.20. Sean (G, cl) una pregeometría y $Y, W \subseteq G$. Decimos que Y es *cl-independiente* sobre W si y solo si $d(Y'W') = |Y'| + d(W')$ para todo $Y' \in [Y]^{<\omega}$ y todo $W' \in [W]^{<\omega}$. Una *base* para X sobre W es un conjunto $Y \subseteq X$ maximal independiente sobre W.

Notación 1.21. Si $Y_1, Y_2 \subseteq X$ son bases para X sobre W, entonces $|Y_1| = |Y_2|$. Por lo tanto, tiene sentido definir la *cl*-dimensión de X sobre W como el cardinal de una base para X sobre W, y se denota por $d(X/W)$. En el caso de que X y W sea finitos, se tiene que $d(X/W) = d(XW) - d(W)$.

A continuación enunciaremos una caracterización de esta nueva noción de independencia, bastante útil para explicar intuitivamente esta noción.

Hecho 1.22. *Sean (G, cl) una pregeometría y $Y, W \subseteq G$. Entonces Y es independiente sobre W si y solo si para todo $a \in Y$ se tiene que $a \notin cl(W(Y \backslash \{a\}))$*

Esta caracterización nos permite ver de manera más clara algunas consecuencias inmediatas que trae esta noción: si Y es independiente sobre W entonces Y es independiente, y adicionalmente cada elemento de Y no depende de W.

Proposición 1.23. *Si $X \subseteq cl(W)$ entonces $d(X/W) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $X \subseteq cl(W)$ y que $Y \subseteq X$ es independiente sobre W. Si $Y \neq \emptyset$, existe $a \in Y$ y como $Y \subseteq X \subseteq cl(W) \subseteq cl(W(Y \backslash \{a\}))$ entonces $a \in cl(W(Y \backslash \{a\}))$ (contradice el hecho 1.22). Luego $Y = \emptyset$ y por tanto $d(X/W) = 0$. $\square$

Referencias

[Bu] Steven Buechler, *Essential stability theory*, Springer Verlag, Berlin, 1996.

[Ho] Wilfrid Hodges, *Model theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Mo] Javier Moreno, *Teoría de modelos geométrica y aplicaciones*, trabajo de grado, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2000.

[Pi] Anand Pillay, *Geometric stability theory*, Oxford University Press, Oxford, 1996.

E-mail: *phzambranor@unal.edu.co* Departamento de Matemáticas Universidad Nacional de Colombia, Ciudad Universitaria Bogotá - Colombia