

# Capítulo 1

## Categoricidad en clases elementales abstractas dóciles

En este capítulo vamos a trabajar en el contexto de clases elementales abstractas con algunas suposiciones adicionales, aquí vamos a reproducir la prueba de categoricidad ascendente para clases elementales abstractas dóciles dada por R. Grossberg y M. VanDieren, que junto con los trabajos de Shelah dá un teorema tipo Morley para este tipo de Clases.

### 1.1. Preliminares

**Definición 1.1.** Una clase de  $L$ -estructuras,  $(\mathbf{K}, \preceq)$ , es llamada una clase elemental abstracta (cea) si tanto  $\mathbf{K}$  como la relación binaria  $\preceq$  son cerradas bajo isomorfismo y satisfacen las siguientes condiciones:

- A1. Si  $M \preceq N$  entonces  $M \subseteq N$ .
- A2.  $\preceq$  es un orden parcial en  $\mathbf{K}$ .
- A3. Si  $\{A_i : i < \delta\}$  es una cadena  $\preceq$ -creciente:
  1.  $\bigcup_{i < \delta} A_i \in \mathbf{K}$
  2. para todo  $j < \delta$ ,  $A_j \preceq \bigcup_{i < \delta} A_i$
  3. si para todo  $i < \delta$   $A_i \preceq M$  entonces  $\bigcup_{i < \delta} A_i \preceq M$
- A4. Si  $A, B, C \in \mathbf{K}$ ,  $A \preceq C$ ,  $B \preceq C$  y  $A \subseteq B$  entonces  $A \preceq B$ . (Axioma de coherencia)
- A5. Existe un cardinal de Löwenheim-Skolem  $LS(\mathbf{K})$  tal que si  $A \subseteq |B|$ ,  $B \in \mathbf{K}$  existe un  $C \in \mathbf{K}$  con  $A \subseteq C \preceq B$  y  $\|C\| < |A| + \kappa(\mathbf{K})$ .

**Definición 1.2.** Sea  $\mu \geq LS(\mathbf{K})$ . Decimos que  $(\mathbf{K}, \preceq)$  tiene la propiedad de  $\mu$ -amalgamación si y solamente si para todo  $M_l \in \mathbf{K}_\mu$  (para  $l \in \{0, 1, 2\}$ ) tal que  $M_0 \preceq M_1, M_2$  existen  $N \in \mathbf{K}$ , y  $\mathbf{K}$ -inmersiones  $f_l : M_l \rightarrow N$  tales que  $f_l \upharpoonright M_0 = id_{M_0}$  para  $l = 1, 2$ .

$(\mathbf{K}, \preceq)$  tiene la propiedad de amalgamación si y solamente si  $(\mathbf{K}, \preceq)$  tiene la propiedad de  $\mu$ -amalgamación para todo  $\mu \geq LS(\mathbf{K})$

Vamos a suponer sobre la clase  $(\mathbf{K}, \preceq)$ , lo siguiente:

- $\mathbf{K}$  tiene modelos arbitrariamente grandes.
- $(\mathbf{K}, \preceq)$  tiene la propiedad de amalgamación y JEP.

**Teorema 1.1 (Teorema de presentación).** Si  $(\mathbf{K}, \preceq)$  es una cea en un vocabulario  $L$  con  $|L| \leq LS(\mathbf{K})$ , existe un vocabulario  $\bar{L}$  con cardinal  $LS(\mathbf{K})$ , una  $\bar{L}$ -teoría  $T$  de primer orden y un conjunto de  $2^{LS(\mathbf{K})}$  tipos  $\Gamma$  tal que:

$$\mathbf{K} = \{M \upharpoonright L : M \models T \text{ y } M \text{ omite } \Gamma\}.$$

Más aún, si  $M$  es una  $\bar{L}$  subestructura de  $N$  donde  $M, N$  satisfacen  $T$  y omiten  $\Gamma$  entonces  $M \upharpoonright L \preceq N \upharpoonright L$ . En este caso se dice que  $\mathbf{K}$  está presentada como una PCT clase.

*Demostración.* Sea  $\bar{L}$  que contiene símbolos de función  $n$ -aria  $F_i^n$  para  $n < \omega$  e  $i < LS(\mathbf{K})$ . Sea  $T$  una teoría que dice solamente que sus modelos son no vacíos ( $T = \{\exists x(x = x)\}$ ). Para cualquier  $\bar{L}$ -estructura  $M$  y cualquier  $\bar{a} \in M^n$  sea  $M_{\bar{a}}$  que denota el subconjunto de  $M$  enumerado como  $\{F_i^n(\bar{a}) : i < LS(\mathbf{K})\}$ , donde  $n = lg(\bar{a})$ .

El tipo de isomorfismo de  $M_{\bar{a}}$  está determinado por el  $\bar{L}$ -tipo libre de cuantificadores de  $\bar{a}$  (Nótese que  $M_{\bar{a}}$  puede no ser una  $\bar{L}$ -estructura). Sea  $\Gamma$  el conjunto de  $\bar{L}$ -tipos libres de cuantificadores de tuplas finitas  $\bar{a}$  tales que  $M_{\bar{a}} \upharpoonright L \notin \mathbf{K}$  o para algún  $\bar{b} \subset \bar{a}$ ,  $M_{\bar{b}} \upharpoonright L \not\preceq M_{\bar{a}} \upharpoonright L$ .

Afirmamos ahora que  $T$  y  $\Gamma$  son los que necesitamos, esto es que si

$$\bar{K} = \{M \upharpoonright L : M \models T \text{ y } M \text{ omite } \Gamma\}$$

entonces  $\mathbf{K} = \bar{K}$ .

Sea  $M$  una  $\bar{L}$ -estructura que omita  $\Gamma$ , en particular cualquier  $M_{\bar{a}}$  es una  $L$ -estructura pues si no lo fuera obviamente  $M_{\bar{a}} \upharpoonright L \notin \mathbf{K}$ .

Es obvio que  $M = \bigcup_{\bar{a} \in M^{<\omega}} M_{\bar{a}}$ ; además los  $M_{\bar{a}}$  forman un orden dirigido entonces  $M \in \mathbf{K}$ . Inversamente si  $N \in \mathbf{K}$ , debemos extender  $N$  a una  $\bar{L}$ -estructura  $M$  de tal forma que  $M \models T$  y  $M$  omita  $\Gamma$ , para esto definimos por inducción en  $|\bar{a}|$  para  $\bar{a} \subset |N|$  (finito) estructuras  $N_{\bar{a}}$ . Sea  $N_\Phi$  cualquier  $\preceq$ -subestructura de  $N$  de cardinal  $LS(\mathbf{K})$  y sea  $\{(F_i^0)^M : i < LS(\mathbf{K})\}$  una enumeración del universo de  $N_\Phi$ . Ahora dada una tupla  $\bar{b}$  de longitud  $n + 1$  elegimos  $N_{\bar{b}} \preceq N$  de cardinal  $LS(\mathbf{K})$  que contenga todos los  $N_{\bar{a}}$  para  $\bar{a} \subset \bar{b}$  (esto es posible gracias a JEP y A5.). Sea  $\{(F_i^{n+1}(\bar{b}))^M : i < LS(\mathbf{K})\}$  una enumeración de el universo de  $N_{\bar{b}}$  (Dando a la función el mismo valor en cualquier reordenación de  $\bar{b}$ ). Ahora, cualquier  $N_{\bar{a}} \upharpoonright L \in \mathbf{K}$  y si  $\bar{b} \subset \bar{c}$ ,  $M_{\bar{b}} \preceq M_{\bar{c}}$ , entonces  $M$  omita  $\Gamma$  como era requerido. Ahora si  $M \prec N$  (en primer orden),  $M, N \models T$  y  $M$  y  $N$  omiten  $\Gamma$  se tiene que  $M_{\bar{a}} = N_{\bar{a}}$  (porque  $M$  es un  $\bar{L}$ -submodelo elemental de  $N$ ) entonces

$M_{\bar{a}} \upharpoonright L \preceq N \upharpoonright L$  pues  $N_{\bar{a}} \upharpoonright L \preceq N \upharpoonright L$  entonces  $\bigcup M_{\bar{a}} \upharpoonright L \preceq N \upharpoonright L$ , es decir  $M \upharpoonright L \preceq N \upharpoonright L$ . Esto completa la prueba.  $\square$

**Teorema 1.2.** *Si  $\mathbf{K}$  es una cea en un vocabulario  $L$ , la cual es presentada como una PC $\Gamma$  clase testificada por  $\bar{L}, T, \Gamma$ , existe un  $\bar{L}$ -diagrama  $\Phi$  tal que para cualquier orden lineal  $(I, <)$  existe una  $\bar{L}$ -estructura  $EM(I, \Phi) = M$ , tal que:*

1.  $M \models T$ .
2. La  $\bar{L}$ -estructura  $M$  es la clausura de Skolem de  $I$ .
3.  $I$  es un conjunto de  $\bar{L}$ -indiscernibles en  $M$ .
4.  $M \upharpoonright L \in \mathbf{K}$ .
5. Si  $I \subset I'$  entonces  $EM_L(I, \Phi) \preceq EM_L(I', \Phi)$ .

*Demostración.* Ver [Sh:c]  $\square$

## 1.2. Tipos de Galois y saturación

En esta sección definimos la generalización que existe en ceas de la noción de tipo la cual permite generalizar la definición de saturación y probar algunos teoremas análogos a los que se tienen en primer orden. Para esto vamos a usar de manera fuerte amalgamación y JEP.

**Definición 1.3.**  *$M$  es  $\mu$ -modelo homogéneo si para cualquier  $N \preceq M$  y cualquier  $N' \in \mathbf{K}$  con  $|N'| < \mu$  y  $N \preceq N'$  existe una  $\mathbf{K}$ -inmersión de  $N'$  en  $M$  sobre  $N$ .*

**Lema 1.1.** *Si  $M_1$  y  $M_2$  son  $\mu$ -modelo homogéneos de cardinal  $\mu > LS(\mathbf{K})$  entonces  $M_1 \cong M_2$*

*Demostración.* Supongamos primero que existe  $M \preceq M_1, M_2$ , si esto sucede sea  $\{a_i^l : i < \mu, l = 1, 2\}$  una enumeración de  $|M_1| \setminus |M|$  respectivamente, ahora vamos a construir sucesiones  $\{M_i^l : i < \mu; l = 1, 2\}$  y  $\{f_i : M_1^i \hookrightarrow M_2\}$  crecientes y continuas tales que:

1.  $M_i^l \preceq M_l$
2.  $a_i^l \in M_i^l$
3.  $a_i^1 \in \text{dom}(f_{i+1})$  y  $M_i^2 \subseteq \text{ran}(f_{i+1})$

Para esto sea  $M_0^l := M$  y  $f_0 := \text{id}_M$  para el caso cuando  $i$  es límite tomamos uniones. Para el caso  $i + 1$  suponemos construidos  $M_i^l$  y  $f_i$  con las propiedades anteriormente mencionadas; sea  $M_{i+1}^2 \succeq M_i^2, M_{i+1}^2 \preceq M_2$  tal que  $a_i^2 \in M_{i+1}^2$ , sea  $\overline{M_i^1} := f_i^{-1}(M_i^2)$ , cambiando nombres a  $M_{i+1}^2$  existe  $\overline{M_{i+1}^2} \succeq \overline{M_i^1}$  isomorfo a  $M_{i+1}^2$ , como  $M_1$  es  $\mu$ -modelo homogéneo existe  $g : \overline{M_{i+1}^2} \hookrightarrow M_1$  tal que

$g \upharpoonright \overline{M_{i+1}^2} = id_{\overline{M_{i+1}^2}}$  definimos  $\overline{f_{i+1}} : M_{i+1}^2 \hookrightarrow M_1$  definida como  $\overline{f_{i+1}} = g \circ f$ , donde  $f$  es el isomorfismo entre  $M_{i+1}^2$  y  $\overline{M_{i+1}^2}$ .

Analogamente al proceso anterior podemos construir  $f_{i+1} : M_{i+1}^1 \hookrightarrow M_2$  con las propiedades requeridas. Ahora, es claro que  $\bigcup_{i < \mu} f_i : M_1 \rightarrow M_2$  es un isomorfismo, entonces  $M_1 \cong M_2$ .

Ahora si no existe submodelo común entre  $M_1$  y  $M_2$  sean  $N_1$  y  $N_2$  submodelos de cardinal  $< \mu$  de  $M_1$  y  $M_2$  respectivamente, por JEP existe un  $M \succeq N_1, N_2$  de cardinal  $< \mu$ , por la modelo homogeneidad  $M$  está inmerso en  $M_1$  y  $M_2$ , esto nos permite suponer que  $M$  es un modelo común a  $M_1$  y  $M_2$ . Con esto se completa la prueba.  $\square$

**Hecho 1.1.** Si  $\mathbf{K}$  tiene la propiedad de amalgamación y  $\mu_*^{< \mu_*} = \mu_*$  y  $\mu_* \geq 2^{LS(\mathbf{K})}$  entonces existe un modelo  $\mathbb{M}$  de cardinal  $\mu_*$  el cual es  $\mu_*$ -modelo homogéneo. (El modelo  $\mathbb{M}$  se denomina el modelo monstruo)

**Definición 1.4.** podemos definir  $ga - tp(\bar{a}, M, N)$  (donde  $M \preceq N$ ,  $\bar{a} \subset N$ ) como  $(\bar{a}, M, N)/E$  donde  $E$  es la siguiente relación de equivalencia:  $(\bar{a}^1, M^1, N^1)E(\bar{a}^2, M^2, N^2)$  si y solo si  $M^1 = M^2$  y existe  $N \in \mathbf{K}$  tal que  $M_1 \preceq N$  y  $\preceq$ -inmersiones  $f^l : N^l \rightarrow N$  tal que  $f \upharpoonright M^l = id_{M^l}$  y  $f^1(\bar{a}^1) = f^2(\bar{a}^2)$ . Se dice que  $p_1 = (p_2 \upharpoonright M_1)$  si  $M_1 \preceq M_2 \preceq M$ ,  $a \subset M$  y  $p_i = ga - tp(\bar{a}, M_i, M)$ .

**Lema 1.2.**  $(a, M, N_1)E(b, M, N_2)$  si y solamente si existe  $f : \mathbb{M} \cong \mathbb{M}$  tal que  $f \upharpoonright M = id_M$  y  $f(a) = b$

*Demostración.*  $(\Leftarrow)$  Es obvio.

$(\Rightarrow)$  Es suficiente probar que si  $f : M \cong N$ ,  $M \preceq \mathbb{M}(\|M\| < \|\mathbb{M}\|)$  y  $N \preceq \mathbb{M}$ , entonces  $f$  se extiende a un automorfismo de  $\mathbb{M}$ . Para probar esto necesitamos el siguiente:

**Hecho 1.2.** Si  $M$  es modelo homogéneo y  $f : N \hookrightarrow M$  con  $\|N\| < \|M\|$  entonces para todo  $N' \succ N$  con  $\|N'\| < \|M\|$ , existe  $\bar{f} : N' \hookrightarrow M$  tal que  $\bar{f} \upharpoonright N = f$

*Demostración.* si  $f : N \hookrightarrow M$  es una inmersión entonces  $f : N \cong N^* \preceq M$ . Ahora sea  $N' \succeq N$  debe existir entonces  $N'' \in \mathbf{K}$  tal que existe  $f' : N' \cong N''$  con  $f \subseteq f'$  entonces  $N^* \preceq N''$ , por la modelo homogeneidad de  $M$  existe  $g : N'' \hookrightarrow M$  tal que  $g \upharpoonright N^* = id_{N^*}$ , entonces sea

$$\bar{f} : N' \hookrightarrow M$$

$$x \mapsto (g \circ f')(x), \text{ esta función es la requerida. } \square$$

para probar el lema se usa el hecho ya probado y un 'back and forth'  $\square$

Podemos tomar la caracterización dada en lema anterior como una definición alterna de tipos de Galois.

**Definición 1.5.**  $\mathbf{K}$  es estable en  $\mu$  si y solo si para cualquier  $M \in \mathbf{K}_{\leq \mu}$   
 $ga - S(M) := \{ga - tp(a, M, N) \mid M \preceq N \in \mathbf{K}_{\|M\|}, a \in N\}$ ,  
 tiene tamaño  $\leq \mu$ .

Decimos que un tipo de Galois  $p = ga - tp(\bar{a}, M, N)$  es realizado en  $N'$ , con  $M \preceq N'$  ssi existe  $\bar{b} \in (N')^{lg(\bar{a})}$  tal que  $(\bar{a}, M, N)E(\bar{b}, M, N'')$ , con  $N'' \preceq N'$

**Definición 1.6.** *Un modelo  $M$  es  $\mu$ -galois saturado si para cualquier  $N \preceq M$  con  $|N| < \mu$  y cualquier tipo de Galois  $p$  sobre  $N$  es realizado en  $M$*

**Teorema 1.3.** *para  $\lambda > LS(\mathbf{K})$ , un modelo  $M$  es  $\lambda$ -Galois saturado si y solo si este es  $\lambda$ -modelo homogéneo*

*Demostración.* ( $\Leftarrow$ ) Obvio. ( $\Rightarrow$ ) Dado  $M_0 \prec M$  y  $M_0 \preceq N$  con  $\|N\| = \mu < \lambda$ ; sea  $\{a_i : i < \mu\}$  una enumeración de  $|N| \setminus |M_0|$ , vamos a definir  $f_i$  para  $i < \mu$  una secuencia creciente y continua de funciones con dominio  $N_i$  y rango  $M_i$  tal que:  $M_0 \prec N_i \preceq \mathbb{M}$ ;  $M_0 \preceq M_i \preceq M$  y  $a_i \in N_{i+1}$ . La restricción de  $\bigcup_{i < \lambda} f_i$  a  $N$  es la función requerida. Sea  $N_0 = M_0$  y  $f_0$  la identidad de  $M_0$ . Supongamos  $f_i$  ya construida, si  $a_i \in N_i$   $M_{i+1} = M_i$ ,  $N_{i+1} = N_i$  y  $f_{i+1} = f_i$ , ahora si  $a_i \in |N| \setminus |N_i|$  por el lema anterior como  $M_i, N_i \preceq \mathbb{M}$  y  $f_i : N_i \cong M_i$ , se tiene que  $f_i$  se extiende a un automorfismo  $\hat{f}_i$  de  $\mathbb{M}$ . Como  $M$  es saturado sea  $b_i \in M$  que realiza el tipo de Galois de  $\hat{f}_i(a_i)$  sobre  $M_i$  entonces existe  $\alpha \in Aut(\mathbb{M})$  que fija  $M_i$  y  $\alpha(b_i) = \hat{f}_i(a_i)$ . Sea  $M_{i+1} \preceq M$  de cardinal  $\mu$  que contiene  $M_i \cup \{b_i\}$ , ahora sea  $N_{i+1} = (\hat{f}_i^{-1} \circ \alpha)(M_{i+1})$  y definimos  $f_{i+1}$  como la restricción de  $\alpha^{-1} \circ \hat{f}_i$  a  $N_{i+1}$ ;  $f_{i+1}$  tiene las propiedades requeridas  $\square$

Si deseamos de alguna manera tener un teorema tipo Morley (extensión de categoricidad de un cardinal a ‘todos’) en algún contexto no elemental, es razonable pensar en primero poder extender estabilidad de un cardinal a ‘todos’, tratando así de imitar el tratamiento que se da en el caso elemental. En el caso de clases elementales abstractas la categoricidad en un cardinal implica estabilidad ‘hacia abajo’ como la vamos a presentar en la siguiente sección.

### 1.3. Estabilidad descendente

Trabajamos ahora con una noción de modelo homogeneidad relativa.

**Definición 1.7.**  *$N$  es  $\mu$ -universal sobre  $M$  si dado  $N' \succeq M$  con  $\|M'\| \leq \mu$  existe  $f : N' \hookrightarrow N$  tal que  $f \upharpoonright M = id_M$*

Para esta parte vamos a trabajar con tres clases elementales abstractas:  $(LO, \subset) Mod(T')$  (teorema 2.1) con la noción de submodelo como  $\tau$ -subconjuntos cerrados y  $(\mathbf{K}, \preceq)$

**Definición 1.8.**  *$M$  es brimful si para cualquier  $\mu < \|M\|$ , y cualquier  $M_1 \preceq M$  con  $\|M_1\| = \mu$ , existe un  $M_2 \preceq M$  con cardinal  $\mu$  que es  $\mu$ -universal sobre  $M_1$  en  $M$*

Como ya lo habíamos dicho consideramos la clase de los ordenes lineales como una clase elemental abstracta, probaremos ahora que en esta clase existe un modelo de cardinal  $\mu$  que es brimful. La prueba de esto se puede encontrar por ejemplo en [Ba1]

**Hecho 1.3.** *El orden lineal  $I = \lambda^{<\omega}$  es brimful*

En lo que sigue  $I$  será un orden lineal.

No es difícil ver que cualquier  $\tau'$ -subestructura  $N$  de  $EM(I, \Phi)$  está contenida en una subestructura  $EM(I_0, \Phi)$  para algún subconjunto  $I_0$  de  $I$  con  $|I_0| = |N|$  (basta con tomar  $I_0$  como el conjunto de generadores de  $N$ ), tenemos entonces el siguiente:

**Hecho 1.4.** *Si  $I$  es brimful como un orden lineal,  $EM(I, \Phi)$  es brimful como una  $\tau'$ -estructura.*

*Demostración.* Sea  $\sigma < \|EM(I, \Phi)\|$  y  $N \subseteq EM(I, \Phi)$ ,  $|N| = \sigma$  entonces existe  $I_0 \subseteq I$  tal que  $|I_0| = |N|$  y  $N \subseteq EM(I_0, \Phi)$  como  $I$  es brimful existe  $I_1 \subseteq I$  tal que  $|I_1| = \sigma$  y es  $\sigma$ -universal sobre  $I_0$  en  $I$  aplicando el teorema 2.2 y que la noción de universalidad se transmite bien usando el funtor  $EM$  (Es solo una verificación) se tiene el resultado.  $\square$

Lo que queremos estudiar es la relación entre la clase  $(LO, \subset)$  y la clase  $(\mathbf{K}, \preceq)$ , este hecho es entonces insuficiente.

**Teorema 1.4.** *Si  $I$  es brimful como orden lineal,  $EM_\tau(I, \Phi)$  es brimful como un miembro de  $\mathbf{K}$ .*

*Demostración.* Sea  $M = EM(I, \Phi)$ ; vamos a probar que  $M \upharpoonright \tau$  es brimful como un miembro de  $\mathbf{K}$ , suponga que  $M_1 \preceq M \upharpoonright \tau$  con  $\|M_1\| = \sigma < \|M\|$ . Entonces existe  $N_1 = EM(I', \Phi)$  con  $\|I'\| = \sigma$ ,  $I' \subseteq I$ ,  $M_1 \subseteq N_1 \preceq M$ . Por el teorema 2.2  $N_1 \upharpoonright \tau \preceq M \upharpoonright \tau$ . Ahora  $M_1 \preceq N_1 \upharpoonright \tau$  por el axioma de coherencia. Sea  $M_2$  de cardinal  $\sigma$  y  $M_1 \preceq M_2 \preceq M \upharpoonright \tau$ . Elegimos una  $\tau'$  subestructura  $N_2$  de  $M$  con cardinal  $\sigma$  conteniendo  $N_1$  y  $M_2$ . Ahora  $N_2$  puede ser inmerso por una función  $f$  en la  $\tau'$ -estructura  $\sigma$ -universal  $N_3$  que contiene a  $N_1$  esto es garantizado por el hecho anterior. Pero  $f(N_2) \upharpoonright \tau \preceq N_3 \upharpoonright \tau$ , por el axioma de coherencia pues  $f(N_2) \upharpoonright \tau \preceq M$  entonces  $N_3$  es la extensión  $\sigma$ -universal requerida de  $M_1$ .  $\square$

**Lema 1.3.** *Si  $\mathbf{K}$  es  $\lambda$ -categórica, el modelo  $M$  con  $\|M\| = \lambda$  es estable para cualquier  $\sigma < \lambda$  (Esto es: para cualquier  $M_1 \preceq M$  de cardinal  $\sigma$  sólo  $\sigma$  tipos de Galois sobre  $M_1$  son realizados en  $M$ .)*

*Demostración.* Cualquier realización en  $M$  de un tipo de Galois sobre  $M_0$  es representada por un  $M_1$  con  $\|M_1\| = \|M_0\|$ , pues si  $a$  realiza el tipo  $p$  por  $LS$  existe  $M_1$  tal que  $M_0 \subseteq M_1$ ,  $a \in M_1$  y  $M_1 \preceq M$  por coherencia  $M_0 \preceq M_1$ .

Sea  $\sigma < \lambda$ , tenemos que  $\|M\| = \|EM(\lambda^{<\omega}, \Phi)\| = \lambda$ , entonces  $M$  es brimful (por categoricidad), ahora sea  $M_0 \preceq M$  tal que  $\|M_0\| = \sigma$  y  $M_1$  es  $\sigma$ -universal sobre  $M_0$  en  $M$ , cada tipo de Galois sobre  $M_0$  realizado en  $M$  está representado por un  $M'$ , pero por la universalidad de  $M_1$   $M'$  debe estar inmerso en  $M_1$  por medio de una función que fija puntualmente  $M_0$  entonces todo tipo sobre  $M_0$  realizado en  $M$  es realizado en  $M_1$  como el tamaño de  $M_1$  es  $\sigma$ , entonces  $M$  es  $\sigma$ -estable.  $\square$

**Teorema 1.5 (Lema de estabilidad descendente).** *Si  $\mathbf{K}$  es categórica en  $\lambda$ , entonces  $\mathbf{K}$  es  $\sigma$ -Galois estable para todo  $\sigma < \lambda$  ( $\sigma > LS(\mathbf{K})$ )*

*Demostración.* Supongamos que  $\mathbf{K}$  no es  $\sigma$ -estable para algún  $\sigma < \lambda$ . Por *LS* existe un modelo  $N$  de cardinal  $\sigma^+$  que no es  $\sigma$ -estable. (Para esto tome  $\{p_i : i < \sigma^+\}$  un conjunto de tipos sobre un modelo  $M_0$  de cardinal  $\sigma$  realizados en un modelo  $M$ , para cada  $p_i$  tome una realización  $a_i$ , ahora por *LS* aplicado a  $\|M_0\| \cup \{a_i : i < \sigma^+\}$  y a  $M$ , el modelo resultante tiene cardinal  $\sigma^+$  y no es  $\sigma$ -estable).

Sea  $M \in \mathbf{K}$ ,  $\|M\| = \lambda$  entonces por *JEP* existe  $M'$  tal que  $M$  y  $N$  están inmersos en  $M'$  por *LS* podemos suponer  $\|M'\| = \lambda$  entonces  $M \cong M'$  por lo tanto  $N$  está inmerso en  $M$  imposible pues  $N$  no es  $\sigma$ -estable.  $\square$

## 1.4. Tipos minimales

El objetivo de esta sección es probar un teorema de transferencia de categoricidad hacia arriba en clases elementales abstractas dóciles, para ello vamos a seguir el trabajo hecho por R. Grossberg y M. VanDieren en [GrVa]

**Definición 1.9.** Sea  $M \in \mathbf{K}_\mu$ ,  $\sigma$  un ordinal límite con  $\sigma < \mu^+$ , se dice que  $M' \in \mathbf{K}$  es  $(\mu, \sigma)$ -modelo límite sobre  $M$  si y solo si existe una cadena creciente y continua  $(M_i \in \mathbf{K}_\mu | i < \sigma)$  tal que  $M = \bigcup_{i < \sigma} M_i$  y  $M_{i+1}$  es universal sobre  $M_i$

Siguiendo las ideas del lema 2.1 se puede probar lo siguiente:

**Hecho 1.5.** Sea  $\mu$  un cardinal y  $\sigma$  un ordinal límite tal que  $\mu \geq LS(\mathbf{K})$  y  $\sigma < \mu^+$ . Si  $M$  y  $M'$  son  $(\mu, \sigma)$ -modelos límite sobre  $M_0$ , entonces existe  $f : M \cong M'$  con  $f \upharpoonright M_0 = id_{M_0}$ .

Vamos aprobar ahora la existencia de modelos límites bajo la propiedad de amalgamación y estabilidad.

**Teorema 1.6.** Si  $\mathbf{K}$  satisface la propiedad de amalgamación y es Galois estable en  $\mu$ , entonces para cualquier  $M \in \mathbf{K}_\mu$ , existe  $M^* \in \mathbf{K}_\mu$  tal que  $M \preceq M^*$  y  $M^*$  es universal sobre  $M$ . Esto implica que cualquier  $M \in \mathbf{K}_\mu$  y  $\sigma < \mu^+$  existe  $N \succeq$  el cual es  $(\mu, \sigma)$ -límite.

*Demostración.* Sea  $\{M_i | i < \mu\} \subseteq \mathbf{K}_\mu$  tal que  $M_0 = M$  y cualquier tipo de Galois sobre  $M_i$  es realizado en  $M_{i+1}$ . Para esto sea  $\{p_i | i < \mu\}$  los tipos sobre  $M_i$  realizados en algún modelo de cardinal  $\mu$  (son  $\mu$  gracias a estabilidad), ahora sea  $M_{i+1}$  un modelo que realiza cada uno de los tipos  $p_i$  la construcción de  $M_{i+1}$  se puede hacer por inducción aplicando sucesivamente la propiedad de amalgamación.

Teniendo esto sea  $M^* = \bigcup_{i < \mu} M_i$  vamos a probar ahora, que este modelo es universal sobre  $M$ .

**Lema 1.4.**  $M^*$  es universal sobre  $M$

*Demostración.* Sea  $N \succeq M$  vamos a construir una inmersión  $f : N \hookrightarrow M^*$  tal que  $f \upharpoonright M = id_M$  fijamos  $\{a_i | i < \mu\}$  una enumeración de  $|N| \setminus |M|$ , por

inducción en  $i < \mu$  definimos cadenas crecientes y continuas  $\{N_l^i \mid i < \mu, l = 0, 1\}$  y  $\{f_i \mid i < \mu\}$  tales que:

1.  $N_0^i \preceq N_1^i$
2.  $N_0^0 = M, N_1^0 = N$
3.  $a_i \in N_0^{i+1} \cap N_1^i$
4.  $f_i : N_0^i \hookrightarrow M_i$

es claro que  $\bigcup f_i \upharpoonright N$  es como se requiere.

Para la construcción en los casos límites se toma la unión. En los sucesores consideramos dos casos:

1. Si  $a_i \in N_0^i$ . Sea  $N_l^{i+1} = N_l^i$  ( $l = 0, 1$ ) y  $f_{i+1} = f_i$ .
2. Si por el contrario  $a_i \notin N_0^i$ ; sea  $M_0^i = f_i(N_0^i)$ . Sea  $g$  una extensión de  $f_i$  tal que  $g : N_1^i \cong \overline{M_1^i}$  en particular esto implica que  $M_0^i \preceq M_1^i$ .

Por la propiedad de amalgamación existe  $M_1^i$  tal que  $M_i \preceq M_1^i$  y existe  $\bar{g} : \overline{M_1^i} \hookrightarrow M_1^i$  sobre  $M_0^i$ , como  $a_i \in |N_1^i| \setminus |N_0^i|$  entonces  $g(a_i) \in |\overline{M_1^i}| \setminus |M_0^i|$ . Sea  $p = ga - tp(\bar{g}(g(a_i)), M_i)$ ,  $p$  es un tipo realizado en  $M_{i+1}$  (por la construcción de  $M_{i+1}$ ), sea  $b$  que realiza  $p$ ,  $b \in M_{i+1}$  se tiene entonces que  $(M_i, M_1^i, \bar{g}(g(a_i)))E(M_i, M_{i+1}, b)$  por lo tanto cambiando nombres podemos suponer que existe  $N^{**} \in \mathbf{K}_\mu$  y  $h_1 : M_{i+1} \rightarrow N^{**}$  tales que  $h_1 \upharpoonright M_i = id_{M_i}$ ,  $M_1^i \preceq N^{**}$  y  $\bar{g}(g(a_i)) = h_1(b)$ . Ahora, como  $N_1^i$  está inmerso en  $N^{**}$  por medio de  $\bar{g} \circ g$  existe  $N_1^{j+1} \succeq N_1^i$  tal que existe  $h \supseteq \bar{g} \circ g$  y  $h : N_1^{j+1} \cong N^{**}$ . Sea  $N_1^{i+1} = h^{-1}(h_1(M_{i+1}))$ , como  $\bar{g}(g(a_i)) = h_1(b)$  se tiene que  $a_i \in N_0^{i+1}$ , además  $N_0^{i+1} \supseteq N_0^i$  porque si  $a \in N_0^i$  entonces  $g(a) \in M_0^i$ , por lo tanto  $\bar{g}(g(a)) \in \bar{g}(M_0^i) = M_0^i \subseteq M_i$ , entonces tenemos que  $h_1(\bar{g}(g(a))) = \bar{g}(g(a))$  y ent  $a = h^{-1}(h_1(b))$  con  $b \in M_{i+1}$ . Definimos  $f_{i+1} = h^{-1} \circ (h \upharpoonright N_0^{i+1})$ . Esta función es una inmersión que extiende a  $f_i$  que satisface las condiciones requeridas. □

Teniendo ya probado el lema solo basta por hacer una inducción para probar la segunda parte del teorema. □

Ahora vamos a definir las clases sobre las cuales vamos a probar el teorema de categoricidad ascendente.

**Definición 1.10.** Sea  $\chi$  un cardinal. Decimos que una clase elemental abstracta  $\mathbf{K}$  con la propiedad de amalgamación es  $\chi$ -dócil si para cualquier  $M \in \mathbf{K}_{<\chi}$ ,  $p \neq q \in ga - S(M)$  existe  $N \preceq M$  tal que  $p \upharpoonright N \neq q \upharpoonright N$ .

$\mathbf{K}$  es  $(\mu, \chi)$ -dócil si para cualquier  $M \in \mathbf{K}_\mu$  y todo  $p, q \in ga - S(M)$  siempre que  $p \neq q$  existe  $N \preceq M$  de cardinal  $\chi$  tal que  $p \upharpoonright N \neq q \upharpoonright N$

**Definición 1.11.** Sea  $M \in \mathbf{K}_\mu$  y  $p \in ga - S(M)$ . Decimos que  $p$  es minimal si y solo si  $p$  es no algebraico (no existe  $c \in M$  que realice  $p$ ) y para cualquier  $M' \in \mathbf{K}_\mu$  con  $M \preceq M'$  existe exactamente una extensión no algebraica de  $p$  a  $M'$ .

**Teorema 1.7 (Monotonía de tipos minimales).** Supongamos que  $\mathbf{K}$  es  $(\lambda, \chi)$ -dócil para algún  $\lambda \geq \mu \geq \chi$ . Si  $p \in ga - S(M)$  es minimal con  $M \in \mathbf{K}_\mu$ , entonces para todo  $N \in \mathbf{K}_{\geq \lambda}$  extendiendo a  $M$  y cualquier  $q \in ga - S(M)$  extendiendo  $p$ , si  $q$  es no algebraico entonces es minimal.

*Demostración.* Supongamos que  $p$  y  $q$  son como en el enunciado del teorema pero que  $q$  no es minimal, sean entonces  $q', q'' \in ga - S(N')$  para algún  $N' \in \mathbf{K}_\lambda$  con  $N \preceq N'$ . Por docilidad podemos encontrar  $M' \in \mathbf{K}_\mu$  tal que  $M \preceq M' \preceq N'$  y  $q' \upharpoonright M' \neq q'' \upharpoonright M'$  notese que  $q' \upharpoonright M'$  y  $q'' \upharpoonright M'$  son ambas extensiones no algebraicas de  $p$ . Esto es una contradicción con la minimalidad de  $p$ .  $\square$

**Hecho 1.6.** Si  $\mathbf{K}$  es galois estable en  $\mu$ , entonces para cualquier  $N \in \mathbf{K}_\mu$  y cualquier  $q \in ga - S(N)$ , existe  $M \in \mathbf{K}_\mu$  y cualquier  $q \in ga - S(N)$ , existe  $M \in \mathbf{K}_m u$  y  $p \in ga - S(M)$  tal que  $N \prec M$ ,  $p$  es extensión de  $q$  y  $p$  es minimal.

*Demostración.* [Sh394]  $\square$

**Hecho 1.7 (Extensión de tipos minimales).** Sea  $\mathbf{K}$  categórica en algún  $\lambda > LS(\mathbf{K})$  y  $(\lambda, \chi)$ -dócil para algún  $\chi < \lambda$ . Sea  $\mu$  tal que  $LS(\mathbf{K}) < \mu < cf(\lambda)$ . Si  $p \in ga - S(M)$  es minimal y  $M$  es  $(\mu, \sigma)$ -límite par algún ordinal límite  $LS(\mathbf{K} < \sigma < \mu^+$ , entonces para cualquier  $M' \in \mathbf{K}_{\leq \lambda}$  extendiendo  $M$ , existe un  $q \in ga - S(M')$  tal que  $q$  extiende  $p$ .

Vamos a definir una cierta clase de tipos que nos van permitir transferir pares de Vaught de un cardinal a otro, estos son tipos minimales que pueden 'controlar' su minimalidad.

**Definición 1.12.** Sea  $M \in \mathbf{K}_\mu$ . Un tipo  $p \in ga - S(M)$  es minimal enraizado si y solamente si  $p$  es minimal y existe  $N \preceq M$  de cardinal  $< \mu$  tal que  $p \upharpoonright N$  es minimal. Decimos que  $N$  es una raíz de  $p$ .

**Teorema 1.8 (Existencia de tipos minimales enraizados).** Sea  $\mathbf{K}$  categórica en algún  $\lambda > \chi^+$  y  $(\lambda, \chi)$ -dócil con  $\chi \geq LS(\mathbf{K})$ . Si  $cf(\lambda) > LS(\mathbf{K})$  entonces para cualquier  $M' \in \mathbf{K}_\lambda$ , existe un tipo minimal enraizado  $q \in ga - S(M')$ .

**Teorema 1.9.** Suponga que  $\mathbf{K}$  es  $\chi$ -dócil. Sea  $N \in \mathbf{K}_{\geq \chi}$ . Si  $p \in ga - S(M)$  es minimal enraizado con  $N \preceq M$  un submodelo tal que  $p \upharpoonright N$  es minimal, entonces para cualquier  $N'$  con  $N \preceq N' \preceq M$  tenemos que  $p \upharpoonright N'$  es minimal.

*Demostración.*  $p \upharpoonright N'$  es no algebraico, pues  $p$  no lo es y toda realización de  $p$  es realización de  $p \upharpoonright N'$ , ahora como  $p \upharpoonright N'$  es no algebraico tenemos por la monotonía de tipos minimales que  $p \upharpoonright N'$  es minimal  $\square$

## 1.5. Pares de Vaught

Vamos ahora a definir la noción de pares de Vaught que funciona en este contexto; es la generalización de la definición de primer orden pero con una pequeña variación.

**Definición 1.13.** Sea  $\mu \geq \lambda$ . Fijamos  $M \in \mathbf{K}_\mu$  y  $p \in ga - S(M)$  un tipo minimal.

Un par de modelos  $(N_0, N_1)$  se llaman un  $(p, \lambda)$ -par de Vaught si  $N_0$  y  $N_1$  son de cardinal  $\lambda$ ,  $M \preceq N_0 \not\preceq N_1$  y no existe  $c \in N_1 \setminus N_0$  realizando  $p$

**Hecho 1.8.** Asumimos que  $\mathbf{K}$  es categórica en algún  $\lambda^+ > LS(\mathbf{K})$ . Entonces para cualquier modelo  $M \in \mathbf{K}_{\leq \lambda}$  y cualquier tipo minimal  $p \in ga - S(M)$ , no existe  $(p, \lambda)$ -pares de Vaught.

*Demostración.* Ver [Sh394] □

El siguiente teorema nos da una transferencia de pares de Vaught 'hacia abajo'.

**Teorema 1.10.** Sea  $\mu > LS(\mathbf{K})$ . Sea  $p$  un tipo minimal enraizado sobre un modelo  $m$  de cardinal  $\mu$ . Fijamos una raíz  $N \preceq M$  de cardinal  $\kappa$ , con  $p \upharpoonright N$  minimal. Si  $\mathbf{K}$  tiene un  $(p, \mu)$ -par de Vaught, entonces existe un  $(p \upharpoonright N, \kappa)$ -par de Vaught.

*Demostración.* Supongamos que  $(N^0, N^1)$  son un  $(p, \mu)$ -par de Vaught. Sea  $C$  el conjunto de todas las realizaciones de  $p \upharpoonright N$  en  $N^1$ . Sea  $a \in |N^1| \setminus |N^0|$ . Construimos ahora una cadena de pares de modelos  $\{N_i^0, N_i^1 \in \mathbf{K}_\kappa \mid i < \omega\}$  que satisface lo siguiente:

1.  $N_0^0 = N$
2.  $N_i^0 \preceq N_i^1$
3.  $N_i^l \not\preceq N^l$  para  $l = 0, 1$
4. Las sucesiones  $\{N_i^l \mid i < \kappa^+\}$  son crecientes y continuas
5.  $a \in N_i^1 \setminus N_i^0$
6.  $C_i = C \cap N_i^1 \subseteq N_{i+1}^0$ .

Para poder hacer esta construcción necesitamos un lema.

**Lema 1.5.** Si  $d \in N^1$  y realiza  $p \upharpoonright N_0^0$  entonces  $d \in N^0$ . Esto es  $C \subseteq N^0$ .

*Demostración.* supongamos que  $d \in N^1 \setminus N^0$ . Entonces  $ga - tp(d/N^0)$  es una extensión no algebraica de  $p \upharpoonright N_0^0$ . Como  $p \upharpoonright N_0^0$  es minimal, tenemos que  $ga - tp(d/M) = p$  (pues ambos son extensiones de  $p \upharpoonright N_0^0$ ). Pero como  $(N^0, N^1)$  forman un  $(p, \mu)$ -par de Vaught se debe tener que  $d \in N^0$ , contradiciendo nuestra elección de  $d$ . □

Sea  $N_0^1$  un submodelo de  $N^1$  de tamaño  $\kappa$  que contenga a  $a$  y a  $N_0^0$  (esto se logra gracias a  $LS$ ). Supongamos ahora que tenemos construido  $\{N_i^1 \mid i < \alpha + 1\}$ . Sea  $N_{\alpha+1}^0$  un submodelo de  $N^0$  de tamaño  $\kappa$  que contenga a  $N_\alpha^0$ , y a  $C \cap N_\alpha^1$ , esto es posible gracias a el lema anterior pues  $C \cap N_\alpha^1 \subseteq N^0$ . Tomamos a  $N_{\alpha+1}^1$  un submodelo de  $N^1$  de tamaño  $\kappa$  que contenga a  $N_\alpha^1$ .

Veamos ahora que la construcción sirve para nuestro propósito, sea  $N_\omega^l = \bigcup_{i < \omega} N_i^l$ .

**Lema 1.6.** *Para cualquier  $c \in N_\omega^1 \cap C$ , tenemos que  $c \in N_\omega^0$ .*

*Demostración.* Como  $\{N_i^1 \mid i < \omega\}$  es continua, existe  $i < \omega$  tal que  $c \in N_i^1$ . Entonces  $c \in C_i$  (pues  $c \in C$ ). Por la condición 5 de la construcción  $c \in N_{i+1}^0 \preceq N_{\omega}^0$ .  $\square$

Es claro que  $N_\omega^0 \neq N_\omega^1$  pues  $a \in N_\omega^1 \setminus N_\omega^0$ . Ahora por el lema anterior toda realización de  $p \upharpoonright N$  en  $N_\omega^1$  está en  $N_\omega^0$ , por lo tanto como  $N_\omega^0 \not\cong N_\omega^1$ ,  $(N_\omega^0, N_\omega^1)$  son un  $(p \upharpoonright N, \kappa)$ -par de Vaught.  $\square$

**Corolario 1.1.** *Sea  $\lambda > LS(\mathbf{K})$ . Si  $\mathbf{K}$  es categórica en  $\lambda$  y  $\lambda^{++}$  y  $p$  es un tipo minimal enraizado sobre un modelo de cardinal  $\lambda^+$ , entonces no existen  $(p, \lambda^+)$  pares de Vaught.*

*Demostración.* Supongamos  $(N_0, N_1)$  un  $(p, \lambda^+)$ -par de Vaught. Entonces como  $p$  es un tipo enraizado existe una raíz  $N'$ , sea  $N \succeq N'$  de cardinal  $\lambda$ , entonces  $p \upharpoonright N$  es minimal, por el teorema anterior existe un  $(p \upharpoonright N, \lambda)$ -par de Vaught, esto contradice el hecho (1.8).  $\square$

**Corolario 1.2.** *Sea  $\lambda > LS(\mathbf{K})$ . Si  $\mathbf{K}$  es categórica en  $\lambda$  y  $\lambda^+$ , entonces cualquier tipo minimal enraizado sobre un modelo  $N$  de cardinal  $\lambda^+$  es realizado  $\lambda^{++}$ -veces en cualquier modelo de cardinal  $\lambda^{++}$  extendiendo a  $N$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $M \in \mathbf{K}_{\lambda^{++}}$  realiza  $p$  solamente  $\alpha < \lambda^{++}$  veces. Sea  $A := \{a_i \mid i < \alpha\}$  una enumeración de las realizaciones de  $p$  en  $M$ . Podemos encontrar  $N_0 \in \mathbf{K}_{\lambda^+}$  tal que  $N \cup A \subseteq N \preceq M$ . Como  $M$  tiene cardinal  $\lambda^{++}$ , podemos encontrar  $N_1 \in \mathbf{K}_{\lambda^+}$  tal que  $N_0 \not\cong N_1 \preceq M$ . Entonces  $(N_0, N_1)$  es un  $(p, \lambda^+)$ -par de Vaught, esto contradice el corolario anterior  $\square$

## 1.6. Categoricidad ascendente

En esta sección vamos a probar un teorema de transferencia de categoricidad hacia arriba.

**Teorema 1.11.** *Supongamos que  $M_0 \in \mathbf{K}_\lambda$  y  $r \in ga - S(M_0)$  un tipo minimal tal que  $\mathbf{K}$  no tiene  $(r, \lambda)$ -pares de Vaught.*

*Sea  $\alpha$  un ordinal  $< \lambda^+$  tal que  $\alpha = \lambda \cdot \alpha$ . Supongamos  $M \in \mathbf{K}_\lambda$  tiene una resolución  $\{M_i \in \mathbf{K}_\lambda \mid i < \alpha\}$  tal que para cualquier  $i < \alpha$ . Existe  $c_i \in M_{i+1} \setminus M_i$  realizando  $r$ . Entonces  $M$  es saturado sobre  $M_0$ . Más aún si  $\mathbf{K}$  es estable en  $\lambda$ , entonces  $M$  es un  $(\lambda, \alpha)$  modelo límite.*



# Bibliografía

- [Ba1] Jonh Baldwin. *Ehrenfeucht-Mostowski models in abstract elementary classes*, preprint.
- [Ba2] Jonh Baldwin. *Notes in a.e.c.*, preprint.
- [B-L] Jonh Baldwin and Alistair Lachlan. On strongly minimal sets. *Journal of Symbolic Logic*, 36, 79-96, 1971.
- [CK] C. C. Chang and H. J. Keisler. *Model Theory*. North Holland Publishing. Co., Amsterdam, 1990.
- [Gr1] Rami Grossberg. *A course in model theory*, en preparación.
- [Gr2] Rami Grossberg. *Classification theory for non elementary classes*, *Logic and Algebra*, ed. Yi Zhang, *Contemporary Mathematics*, 302, (2002) AMS, pp. 165-204.
- [GrVa] Rami Grossberg and Monica VanDieren. *Upward categoricity transfer theorem for tame abstract elementary classes*, preprint.
- [Ke] H. Jerome Keisler, *Model theory for infinitary logic*. North Holland, 1971
- [Pi] A. Pillay, *Geometric Stability Theory*.
- [Sh:c] Saharon Shelah. *Classification theory and the number of non isomorphic models*, Rev. Ed., North Holland, 705 páginas, 1990, Amsterdam.
- [Sh 87a,b] Saharon Shelah. *Classification theory for nonelementary classes*, I. The number of uncountable models of  $\varphi \in L_{\omega_1\omega}$ . Part A y Part B. *Israel Journal of Mathematics*., 46:212-273, 1983.
- [Sh300] Saharon Shelah. *Universal classes, in Classification theory (Chicago, IL, 1985)*, volumen 1292 de *Lecture Notes in Mathematics*, páginas 264-418. Springer-Verlag, Berlin 1987. *Proceedings of the USA-Israel conference on Classification theory*, Chicago, Diciembre 1985; ed. Baldwin, J. T.
- [Sh394] Saharon Shelah. *Categoricity for abstract elementary classes with amalgamation*. *Annals of pure and applied logic*, 98(1-3), pp.141-187,1999.