

Teorías no-contablemente categóricas y conjuntos fuertemente minimales

Juan Diego Caycedo

Noviembre 2004

En estas notas se examinan diferentes tipos de teorías no-contablemente categóricas según la forma en que dominios universales están contruidos a partir de conjuntos fuertemente minimales.

1. Ejemplos de teorías no-contablemente categóricas

En cada uno de los siguientes ejemplos se presenta una teoría no-contablemente categórica, en cada caso \mathfrak{C} denota el dominio universal de dicha teoría, ver [1, pág. 70] para la definición de dominio universal.

Conjuntos infinitos

Sean $L = \emptyset$, $TCI = \{\exists^{>n} x \ x = x : n < \omega\}$.

Es claro que TCI es totalmente categórica y fuertemente minimal (f.m.), es decir, todo subconjunto definible de \mathfrak{C} es finito o cofinito.

Cuerpos algebraicamente cerrados de característica p

Sea p un número primo o cero. Sean $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$ y $TCAC_p$ la teoría de cuerpos algebraicamente cerrados de característica p .

Por el teorema de Steiniz, sabemos que $TCAC_p$ es no-contablemente categórica y, por lo tanto, completa. Además, $TCAC_p$ tiene eliminación de cuantificadores ([4, págs. 1-3]).

Veamos que $TCAC_p$ es f.m. Sea D un subconjunto definible de \mathfrak{C} , entonces, por la eliminación de cuantificadores, $D = \varphi(\mathfrak{C})$ con $\varphi(x)$ una fórmula libre de cuantificadores sobre \mathfrak{C} ; si $\varphi(x)$ es atómica, entonces existen polinomios $p(x), q(x) \in \mathfrak{C}[x]$, tales que $\varphi(x) \equiv p(x) = q(x)$ y, por lo tanto, D es finito o $D = \mathfrak{C}$. Luego, en general, si $\varphi(x)$ es cualquier fórmula libre de cuantificadores, D es combinación booleana de conjuntos finitos y cofinitos, y, en consecuencia, es finito o cofinito.

Espacios Vectoriales sobre un cuerpo contable o finito

Sea K un cuerpo contable o finito. Sean $L = \{+, 0, K\}$, donde cada elemento de K representa una función unaria y TEV_K la teoría de espacios vectoriales sobre K .

TEV_K es no-contablemente categórica, ya que dados $M, N \models TEV_K$ con $|M| = |N| = \kappa > \aleph_0$, para I y J bases de M y N respectivamente, como $\kappa > \aleph_0$, $|I| = |J| = \kappa$, luego existe una biyección entre I y J , y esta induce un isomorfismo entre M y N , en el sentido del álgebra lineal y también en el de estructuras de primer orden.

Puede probarse, de manera análoga a como se hace para $TCAC_p$, que TEV_K tiene eliminación de cuantificadores.

TEV_K también es f.m. Por la eliminación de cuantificadores, todo definible D lo es mediante una fórmula libre de cuantificadores $\varphi(x, \bar{a})$. Si $\varphi(x, \bar{a})$ es atómica, entonces $\varphi(x, \bar{a})$ expresa que dos combinaciones lineales de x y los elementos de \bar{a} son iguales o que son distintas, luego D es finito o cofinito. Lo anterior implica que si $\varphi(x, \bar{a})$ es cualquier fórmula libre de cuantificadores, D es combinación booleana de subconjuntos finitos y cofinitos de \mathfrak{C} y, por lo tanto, D es finito o cofinito.

Plano Projectivo

Sea K un cuerpo infinito. $\mathbb{P}^2(K) = (P, C)$, donde $P = (K^3 - \{\bar{0}\}) / \sim$, con la relación de equivalencia \sim definida para $\bar{a}, \bar{b} \in K^3 - \{\bar{0}\}$ mediante $\bar{a} \sim \bar{b} \iff \exists \lambda \in K - \{0\}$ tal que $\lambda \bar{a} = \bar{b}$, y C es una relación ternaria definida para $[\bar{a}], [\bar{b}], [\bar{c}] \in P$ mediante $C([\bar{a}], [\bar{b}], [\bar{c}]) \iff \exists \lambda \in K^3 - \{\bar{0}\}$ tal que $\lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{b} + \lambda_3 \bar{c} = \bar{0}$, es decir, $[\bar{a}], [\bar{b}], [\bar{c}]$ son colineales en el plano proyectivo.

Nótese que la estructura $\mathbb{P}^2(K) = (P, C)$ es biinterpretable con esta otra versión del mismo plano proyectivo: (P, R, I) , donde P y R son dos suertes, P es el conjunto de los puntos del plano como antes y R es el conjunto de las rectas, e $I \subset P \times R$ es la relación de incidencia entre los elementos de P y los elementos de Q , es decir, entre puntos y rectas. Esta segunda versión puede describirse concretamente de manera análoga a como se hizo con la primera.

La teoría completa que consideramos en este ejemplo es $TPP = Th(\mathbb{P}^2(K))$.

Veremos más adelante que TPP es no-contablemente categórica (ver 3.5), de hecho esta teoría es totalmente categórica.

Veamos que TPP tiene eliminación de cuantificadores. Primero nótese que todo punto a y toda recta L en \mathfrak{C} son definibles mediante las fórmulas atómicas $x = a$ y $C(x, b, c)$, con $b, c \in L$ y $b \neq c$, respectivamente, y, recíprocamente, toda fórmula atómica con exactamente una variable libre define un punto, una recta o un definible trivial, \emptyset o \mathfrak{C} . Por lo tanto, los subconjuntos de \mathfrak{C} definibles mediante una fórmula libre de cuantificadores son precisamente aquellos que son combinación booleana de puntos, rectas, complementos de puntos y complementos de rectas. Para terminar es suficiente ver que dada una fórmula libre de cuantificadores $\varphi(x, y, \bar{a})$, $\exists y \varphi(\mathfrak{C}, y, \bar{a})$ es definible mediante una fórmula sin cuantificadores (pensar en inducción); sabemos que $\varphi(x, y, \bar{a}) \equiv \bigvee_i \bigwedge_j \varphi_{ij}(x, y, \bar{a})$, para algunas fórmulas $\varphi_{ij}(x, y, \bar{a})$ que son atómicas o negaciones de atómicas. Así, $\exists y \varphi(x, y, \bar{a}) \equiv \exists y \bigvee_i \bigwedge_j \varphi_{ij}(x, y, \bar{a}) \equiv \bigvee_i \exists y \bigwedge_j \varphi_{ij}(x, y, \bar{a})$, por lo tanto, sólo falta ver que para cada i , la fórmula $\exists y \bigwedge_j \varphi_{ij}(x, y, \bar{a})$ define un conjunto que es combinación booleana de puntos, rectas, complementos de puntos y complementos de rectas, y esto puede verse al examinar las posibles formas de las fórmulas $\varphi_{ij}(x, y, \bar{a})$, que son, salvo equivalencia y eliminando las que corresponden a definibles triviales: $\pm(x = y)$, $\pm(x = a_k)$, $\pm(y = a_k)$, $\pm C(x, y, a_k)$, $\pm C(x, a_k, a_l)$ y $\pm C(y, a_k, a_j)$.

Lo anterior tiene como consecuencia que toda recta L en \mathfrak{C} es f.m., ya que L es definible mediante la fórmula no algebraica $C(x, a, b)$, donde $a, b \in L$ y $a \neq b$, y, dado que conocemos la forma de todos los subconjuntos definibles de \mathfrak{C} y que la intersección entre dos rectas es siempre un conjunto unitario y, por lo tanto, finito, es claro que la intersección entre L y cualquier definible es un conjunto finito o cofinito.

A continuación probamos que TPP es casi fuertemente minimal (ver 3.1), aunque obviamente

no es f.m. Sean a, b, c, d, e cinco puntos distintos en \mathfrak{C} tales que

$$\models \neg C(a, b, c) \wedge \neg C(a, b, d) \wedge \neg C(a, b, e) \wedge \neg C(c, d, e),$$

y sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y D el conjunto definido por la fórmula $C(a, b, x) \vee x = c \vee x = d \vee x = e$. Así, D es f.m., porque es la unión del conjunto f.m. $C(a, b, \mathfrak{C})$ y el conjunto finito $\{c, d, e\}$, y $\mathfrak{C} = \text{acl}(D \cup A)$, porque para todo $u \in \mathfrak{C}$, existen dos puntos en $\{c, d, e\}$ que no son colineales con u , sin pérdida de generalidad supongamos que dichos puntos son c y d , sean u_c el punto de corte de las rectas $C(a, b, \mathfrak{C})$ y $C(u, c, \mathfrak{C})$ y u_d el punto de corte de las rectas $C(a, b, \mathfrak{C})$ y $C(u, d, \mathfrak{C})$, entonces la fórmula $C(u_c, c, x) \wedge C(u_d, d, x)$ atestigüa que $u \in \text{dcl}(\{u_c, u_d, c, d\})$ y, por lo tanto, $u \in \text{acl}(D \cup A)$.

$$\bigoplus_{i < \omega} \mathbb{Z}_4$$

En este ejemplo consideramos la suma directa de \aleph_0 copias de \mathbb{Z}_4 como grupo aditivo. Sea $TZ = \text{Th}((\bigoplus_{i < \omega} \mathbb{Z}_4, +)$.

Usaremos el hecho de que TZ tiene eliminación de cuantificadores.

Sea M un modelo de T , entonces $2M = \{x \in M : \exists y \ 2y = x\} = \{x \in M : 2x = 0\}$, donde la última igualdad se tiene porque vale en $\bigoplus_{i < \omega} \mathbb{Z}_4$ y, dado que se puede expresar con una sentencia de primer orden, se transmite a todos los modelos de TZ . $2M$ es un subgrupo de M en el que todo elemento no nulo tiene orden 2, esta estructura es equivalente a la de espacio vectorial sobre \mathbb{Z}_2 , luego $2M$ es un subconjunto f.m. de M .

Queremos ver ahora que para todo $a \in M$, $a + 2M$ también es f.m. en M , $a + 2M$ no es, en general, subgrupo de M como $2M$, pero podemos copiar la estructura de $2M$ en $a + 2M$ y con esto concluir que es f.m., esto es: Sea $\hat{+}$ una operación binaria definida en el dominio de M como $x \hat{+} y = x + y - a$, así, $a + 2M$ es un subgrupo del grupo que consiste de el dominio de M equipado con la operación $\hat{+}$, todos sus elementos no nulos tienen orden 2 y, por lo tanto, es un subconjunto f.m. de dicho grupo. Esto implica que $a + 2M$ también es un conjunto f.m. en M , ya que si no lo fuera existiría una fórmula $\varphi(x, \vec{d})$ en el vocabulario $\{+\}$ para la cual $a + 2M \cap \varphi(M, \vec{d})$ y $a + 2M \cap \neg \varphi(M, \vec{d})$ son infinitos, y en ese caso la fórmula $\varphi'(x, \vec{d}, a)$ obtenida al remplazar cada expresión de la forma $()_1 + ()_2$ en $\varphi(x, \vec{d})$, por la expresión equivalente $()_1 \hat{+} ()_2 - a$, sería una fórmula en el vocabulario $\{\hat{+}\}$ para la cual $a + 2M \cap \varphi'(M, \vec{d}, a)$ y $a + 2M \cap \neg \varphi'(M, \vec{d}, a)$ son infinitos, lo cual produce una contradicción.

Nótese que para todo $a \in M$, $a + 2M = \{x \in M : 2x = 2a\}$, con esto podemos expresar M como la unión de una familia de conjuntos f.m. (indexada por un conjunto f.m.) de la siguiente manera:

$$M = \bigcup_{a \in M} a + 2M = \bigcup_{a \in M} \{x \in M : 2x = 2a\} = \bigcup_{b \in 2M} \{x \in M : 2x = b\}.$$

Ahora probemos que TZ es totalmente categórica.

Sean M_1 y M_2 modelos de T con $|M_1| = |M_2| = \kappa \geq \aleph_0$, por la forma como expresamos M sabemos que $|2M_1| = |2M_2| = \kappa$ y, como la teoría de espacios vectoriales sobre \mathbb{Z}_2 es totalmente categórica, esto implica que existe una biyección $\{+\}$ -elemental $f : 2M_1 \rightarrow 2M_2$.

Para cada $b \in 2M_1$ o $b \in 2M_2$, sea a_b tal que $2a_b = b$, supongamos que podemos elegir los a_b de manera que $a_b + a_{b'} = a_{b+b'}$. Así, para $b \in 2M_1$ definimos:

$$\begin{aligned} f_b : a_b + 2M_1 &\rightarrow a_{f(b)} + 2M_2 \\ x &\mapsto f(x - a_b) + a_{f(b)}, \end{aligned}$$

que claramente es una biyección elemental como f .

Sea $F = \bigcup_{b \in 2M} f_b$. F es una función bien definida de M_1 en M_2 porque $\{a_b + 2M_1 : b \in 2M_1\}$ es una partición de M_1 . Veamos que F es un isomorfismo, primero F es biyectiva porque cada f_b lo es, y F preserva la operación $+$ porque para todos $u, v \in M_1$,

$$\begin{aligned} F(u) + F(v) &= f_{2u}(u) + f_{2v}(v) \\ &= f(u - a_{2u}) + a_{f(2u)} + f(v - a_{2v}) + a_{f(2v)} \\ &= f(u + v - (a_{2u} + a_{2v})) + a_{f(2u)} + a_{f(2v)} \\ &= f(u + v - a_{2(u+v)}) + a_{f(2(u+v))} \\ &= F(u + v) \end{aligned}$$

Ahora comprobemos que se puede realizar una elección adecuada de los a_b , es decir, de manera que $a_b + a_{b'} = a_{b+b'}$.

Sea $2M_1 = \{b_i : i < \kappa\}$ una enumeración con $b_0 = 0$. Definimos a_{b_i} por inducción: Sea $a_{b_0} = 0$. Para $i > 0$, supongamos definidos de manera adecuada a_b para $b \in \langle b_j : j < i \rangle$ y extendamos esta definición a todos los $b \in \langle b_j : j \leq i \rangle$ como sigue:

Si $b_i \in \langle b_j : j < i \rangle$, la definición ya está completa.

Si $b_i \notin \langle b_j : j < i \rangle$, sea a_{b_i} cualquier elemento tal que $2a_{b_i} = b_i$ y para todo $b \in \langle b_j : j \leq i \rangle$, $b = \sum_{j \leq i} c_j b_j$ para algunos $c_j \in \{0, 1\}$, entonces definimos $a_b = \sum_{j \leq i} c_j a_{b_j}$.

Veamos que a_b está bien definido, si $b = \sum_{j \leq i} c_j b_j = \sum_{j \leq i} c'_j b_j$ con $c_j, c'_j \in \{0, 1\}$ entonces $0 = \sum_{j \leq i} (c_j - c'_j) b_j$, esto muestra que, dado que $b_i \notin \langle b_j : j < i \rangle$, $c_i = c'_i$, luego $0 = \sum_{j < i} (c_j - c'_j) b_j$ y, como por hipótesis de inducción la definición de los a_b es adecuada para $b \in \langle b_j : j < i \rangle$, tenemos que $0 = \sum_{j < i} (c_j - c'_j) a_{b_j}$. Por lo tanto, $\sum_{j \leq i} c_j a_{b_j} = \sum_{j \leq i} c'_j a_{b_j}$.

Es claro que el hecho de que la definición de a_b para $b \in \langle b_j : j < i \rangle$ se adecuada implica que la nueva definición efectivamente la extiende y también es claro que la definición de los a_b para $b \in 2M_1$ obtenida con la inducción es adecuada.

La definición de los a_b para $b \in 2M_2$ es análoga.

Finalmente, probemos que TZ no es c.f.m. Para esto, supongamos que sí lo es, entonces existe un conjunto finito B tal que $\mathfrak{C} = acl(2\mathfrak{C} \cup B)$ (ver 3.4). Como B es finito, \mathfrak{C} es abeliano y todos los elementos de \mathfrak{C} tienen orden 4, entonces $\langle B \rangle$ también es finito, luego $2\mathfrak{C} + \langle B \rangle \neq \mathfrak{C}$. Ahora veamos que $acl(2\mathfrak{C} + \langle B \rangle) = 2\mathfrak{C} + \langle B \rangle \neq \mathfrak{C}$ lo cual claramente produce una contradicción, para esto nótese que toda fórmula atómica sobre el subgrupo $2\mathfrak{C} + \langle B \rangle$ de \mathfrak{C} es equivalente a una de las siguientes:

- $x = b$, para algún $b \in 2\mathfrak{C} + \langle B \rangle$, que define un punto en $2\mathfrak{C} + \langle B \rangle$,
- $x + x = b$, para algún $b \in 2\mathfrak{C} + \langle B \rangle$, que define $a_b + 2M$ si $b \in 2M$ y \emptyset en caso contrario,
- $x + x + x = b$, para algún $b \in 2\mathfrak{C} + \langle B \rangle$, que define el punto $-b \in 2\mathfrak{C} + \langle B \rangle$.

Así, dado que toda fórmula sobre $2\mathfrak{C} + \langle B \rangle$ es equivalente a una combinación lineal de fórmulas atómicas y negaciones de fórmulas atómicas y que los $a_b + 2M$ son infinitos y disyuntos para b 's distintos, se tiene que los únicos elementos algebraicos sobre $2\mathfrak{C} + \langle B \rangle$ son aquellos que pertenecen a él.

2. Teorías fuertemente minimales

De este punto en adelante, sea T una teoría completa contable y \mathfrak{C} su dominio universal.

Definición 2.1. Dados T , M un modelo de T y $\varphi(x)$ una fórmula sobre M .

Decimos que $\varphi(x)$ es minimal sobre M , o que $\varphi(M)$ es minimal, si $\varphi(x)$ es una fórmula no algebraica y para toda fórmula $\psi(x)$ en M , $\varphi(x) \wedge \psi(x)$ es algebraica o $\varphi(x) \wedge \neg\psi(x)$ es algebraica.

Decimos que $\varphi(x)$ es fuertemente minimal (f.m.), si para toda extensión elemental N de M , $\varphi(x)$ es minimal en N .

T se llama f.m., si y sólo si, la fórmula $x = x$ es f.m.

Nótese que, por 5.5, T es f.m., si y sólo si, \mathfrak{C} es minimal. Ahora recordamos dos hechos básicos cuyas demostraciones pueden consultarse en [2, págs. 208-211].

Lema 2.2. Si D es f.m. y definimos $cl(A) = acl(A) \cap D$, para $A \subset D$, entonces cl es una pregeometría sobre D , esto es: Para todos $A, B \subset D$ y $a, b \in D$,

1. $A \subset cl(A)$ y $cl(cl(A)) = cl(A)$
2. Si $A \subset B$, entonces $cl(A) \subset cl(B)$
3. (carácter finito) Si $a \in cl(A)$, entonces existe $A_0 \subset_{fin} A$ tal que $a \in cl(A_0)$.
4. (intercambio) Si $a \in cl(A \cup \{b\}) - cl(A)$, entonces $b \in cl(A \cup \{a\})$.

El lema anterior hace posible definir una noción de dimensión en los conjuntos f.m. y con ésta probar lo siguiente:

Teorema 2.3. Si T es f.m., entonces T es no-contablemente categórica.

3. Teorías casi fuertemente minimales

Definición 3.1. T se llama casi fuertemente minimal (c.f.m.), si y sólo si, existen un conjunto finito A y un conjunto fuertemente minimal (f.m.) D definible sobre A tales que $\mathfrak{C} = acl(D \cup A)$.

Lema 3.2. T es c.f.m., si y sólo si, existen un conjunto A (no necesariamente finito) y un conjunto f.m. D definible sobre A tales que $\mathfrak{C} = acl(D \cup A)$.

Demostración. Supongamos que existen tales A y D y veamos que T es c.f.m. Sea $D = \psi(\mathfrak{C}, \bar{a})$ con $\bar{a} \subset A$. Para todo $c \in C$, existen $\bar{d}_c \subset D$, $\bar{a}_c \subset A$ y una fórmula $\varphi_c(x, \bar{y}, \bar{z})$ sobre \emptyset , tales que $\varphi_c(x, \bar{d}_c, \bar{a}_c)$ es algebraica y $\models \varphi_c(c, \bar{d}_c, \bar{a}_c)$.

Entonces,

$$\models \exists \bar{y} (\varphi_c(c, \bar{y}, \bar{a}_c) \wedge \exists^{\neq n_c} x \varphi_c(x, \bar{y}, \bar{a}_c) \wedge \bigwedge_i \psi(y_i, \bar{a})),$$

donde $n_c = |\varphi_c(\mathfrak{C}, \bar{d}_c, \bar{a}_c)|$.

Llamemos $\varphi'_c(x)$ a la fórmula

$$\exists \bar{y}(\varphi_c(x, \bar{y}, \bar{a}_c) \wedge \exists^{=n_c} x \varphi_c(x, \bar{y}, \bar{a}_c) \wedge \bigwedge_i \psi(y_i, \bar{a})),$$

así, $\{U_{\varphi'_c(x)} : c \in \mathfrak{C}\}$, donde $U_{\varphi(x)} = \{p \in S_1(A) : \varphi(x) \in p\}$, es un cubrimiento abierto del espacio topológico $S_1(A)$. Por el teorema de Compacidad, sabemos que $S_1(A)$ es un espacio compacto (aquí usamos que A es un conjunto), luego existen $c_1, \dots, c_k \in \mathfrak{C}$ tales que $\{U_{\varphi'_{c_1}(x)}, \dots, U_{\varphi'_{c_k}(x)}\}$ es un cubrimiento de $S_1(A)$.

Sea $A_0 = \bar{a} \cup \bigcup_i \bar{a}_{c_i}$. Es claro que D es definible sobre A_0 . Veamos que $\mathfrak{C} = \text{acl}(D \cup A_0)$, para todo $c \in \mathfrak{C}$, $tp(c/A) \in S_1(A)$, y esto implica que existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\varphi'_{c_i}(x) \in tp(c/A)$, luego $c \models \varphi'_{c_i}(x)$ y, por lo tanto, $c \in \text{acl}(D \cup A_0)$. \square

Lema 3.3. *Sea T una teoría casi fuertemente minimal, y sean A y D como en la definición. Para toda fórmula f.m. $\theta(x)$ (con parámetros), existe un conjunto finito $B \supset A$ tal que:*

1. $\theta(x)$ es una fórmula sobre B .
2. Para todo $b \in \theta(\mathfrak{C}) - \text{acl}(B)$, existe $c \in D$ tal que b y c son interalgebraicos sobre B .
3. Para todo $b \in D - \text{acl}(B)$, existe $c \in \theta(\mathfrak{C})$ tal que b y c son interalgebraicos sobre B .

Demostración. Dada una fórmula f.m. $\theta(x)$, sea $B_0 = A \cup \{\text{parámetros de } \theta(x)\}$. Sea b_0 un elemento de $\theta(\mathfrak{C}) - \text{acl}(B)$, por la hipótesis del lema, existe $\bar{d} \subset D$ tal que $b_0 \in \text{acl}(\bar{d} \cup A) \subset \text{acl}(\bar{d} \cup B_0)$, luego $b_0 \in \text{acl}(\bar{d} \cup B_0)$; tómese \bar{d} minimal entre las tuplas que tienen esta última propiedad, es decir, de manera que para toda tupla $\bar{e} \subsetneq \bar{d}$, $b_0 \notin \text{acl}(\bar{e} \cup B_0)$.

Consideremos $\bar{d} = d_0 \bar{d}'$, así, por la elección de \bar{d} , $b_0 \notin \text{acl}(B_0 \cup \bar{d}')$. Sea $B = B_0 \cup \bar{d}'$, nótese que con esto b_0 y d_0 son interalgebraicos sobre B , ya que $b_0 \in \text{acl}(B \cup \{d_0\}) - \text{acl}(B)$ y, por la propiedad de intercambio de la clausura algebraica en el conjunto f.m. $D \cup B \cup \{b_0\}$, esto implica que $d_0 \in \text{acl}(B \cup \{b_0\})$.

Comprobemos ahora que este conjunto B cumple con las condiciones del lema. Primero, es claro que B es finito y que $\theta(x)$ es una fórmula sobre B . Además, como θ es f.m., todos los elementos de $\theta(\mathfrak{C}) - \text{acl}(B)$ tienen el mismo tipo sobre B , entonces, para todo $b \in D - \text{acl}(B)$, $tp(b/B) = tp(b_0/B)$; por otro lado, dado que $b_0 \in \text{acl}(B \cup \{d_0\})$, existen $\bar{e} \subset B$, $n < \omega$ y una fórmula $\varphi(x, y, \bar{z})$ sobre \emptyset , tales que

$$\models \varphi(b_0, d_0, \bar{e}) \wedge \exists^{=n} x \varphi(x, d_0, \bar{e}) \wedge \psi(d_0, \bar{a}),$$

luego

$$\models \exists y(\varphi(b_0, y, \bar{e}) \wedge \exists^{=n} x \varphi(x, y, \bar{e}) \wedge \psi(y, \bar{a}));$$

y por lo tanto

$$\models \exists y(\varphi(b, y, \bar{e}) \wedge \exists^{=n} x \varphi(x, y, \bar{e}) \wedge \psi(y, \bar{a})),$$

esto significa que existe $c \in D$ tal que $b \in \text{acl}(B \cup c) - \text{acl}(B)$ y, en consecuencia, b y c son interalgebraicos. Finalmente, para comprobar la tercera propiedad se puede usar un argumento análogo al anterior. \square

Corolario 3.4. *Si T es c.f.m. y $\theta(x)$ es una fórmula f.m., entonces existe un conjunto finito B tal que $\theta(x)$ es una fórmula sobre B y $\mathfrak{C} = \text{acl}(\theta(\mathfrak{C}) \cup B)$.*

Demostración. Como T es c.f.m., sean D y A como en la definición. Por el lema anterior, existe un conjunto finito B con las propiedades mencionadas por él, en particular, se tiene que $\theta(x)$ es una fórmula sobre B y $D \subset \text{acl}(\theta(\mathfrak{C}) \cup B)$. Por lo tanto, $\mathfrak{C} = \text{acl}(D \cup B) \subset \text{acl}(\text{acl}(\theta(\mathfrak{C}) \cup B) \cup B) = \text{acl}(\theta(\mathfrak{C}) \cup B)$. \square

Teorema 3.5. *Si T es c.f.m., entonces T es no-contablemente categórica.*

Demostración. Por 5.9, es suficiente ver que T es ω -estable y que no admite pares de Vaught.

Primero comprobemos que T es ω -estable, para esto sean A y D como en la definición de teoría c.f.m. y supongamos que M es un modelo contable de T que contiene a A . Así, para todo $a \in \mathfrak{C}$, existe $\bar{d} \subset D$ tal que $a \in \text{acl}(M \cup \bar{d})$. Dado que D es f.m., por 5.3, $\{tp(\bar{d}/M) : \bar{d} \subset D \text{ (finita)}\}$ es contable, consideremos una enumeración $\{p_i : i < \omega\}$ de este conjunto. Para cada $i < \omega$, sea $\bar{d}_i \models p_i$. Afirmamos que $S_1(M) = \{tp(c/M) : c \in \bigcup_i \text{acl}(M \cup \bar{d}_i)\}$ y por lo tanto es contable, ya que $\bigcup_i \text{acl}(M \cup \bar{d}_i)$ es unión contable de conjuntos contables. Comprobemos la igualdad entre los dos conjuntos de tipos, obviamente el de la derecha está contenido en el de la izquierda; para probar la otra inclusión sea $p \in S_1(M)$ y sea c una realización de p , entonces existe una tupla $\bar{d} \subset D$ tal que $c \in \text{acl}(M \cup \bar{d})$ y, por la definición de los \bar{d}_i , existe $i < \omega$ tal que $tp(\bar{d}/M) = tp(\bar{d}_i/M)$, esto implica que existe $f \in \text{Aut}(\mathfrak{C})$ tal que $f(\bar{d}) = \bar{d}_i$ y $f \upharpoonright_M = \text{id}_M$, como f es un automorfismo tenemos que $tp(c/M) = tp(f(c)/M)$ y $f(c) \in \text{acl}(M \cup \bar{d}_i)$, por lo tanto

$$p = tp(c/M) = tp(f(c)/M) \in \{tp(c/M) : c \in \bigcup_i \text{acl}(M \cup \bar{d}_i)\}.$$

Con esto podemos concluir que T es ω -estable, porque para todo B contable, $A \cup B$ es contable y por lo tanto existe un modelo contable M tal que $M \supset A \cup B$, luego $|S_1(B)| \leq |S_1(M)| \leq \aleph_0$.

Ahora supongamos que T admite un par de Vaught (M, N) para alguna fórmula $\varphi(x)$. Por 5.8, podemos suponer que M y N son modelos saturados contables de T y que $N \supset A$. Además, por 5.6, existe una fórmula f.m. $\theta(x)$ sobre N que implica $\varphi(x)$, esto garantiza que (M, N) también es un par de Vaught para $\theta(x)$, ya que $\theta(x)$ es no algebraica y $\theta(M) \subset \varphi(M) = \varphi(N) \subset N$, luego $\theta(M) = \theta(N)$.

Sea $a \in M - N$, entonces existe $\bar{d} \subset D$ tal que $a \in \text{acl}(\bar{d} \cup M)$, adicionalmente, podemos suponer que $\bar{d} \subset M$ ya que, por la saturación de M , existe $\bar{d}' \subset M$ tal que $\bar{d}' \models tp(\bar{d}/A \cup \{a\})$ y, por lo tanto, $\bar{d}' \in D$ y $a \in \text{acl}(\bar{d}' \cup A)$. Como $a \notin N$, tenemos que $\bar{d}' \notin N$, luego $\psi(M, \bar{a}) \not\subset N$.

Sea $c \in \psi(M, \bar{a}) - N$, entonces, por 3.3, existen un conjunto finito $B \supset A$ y un elemento $b \in \theta(\mathfrak{C})$ tales que b y c son interalgebraicos sobre B . Por la saturación de N , podemos tomar $B \subset N$ (i ?). Así, $b \in \text{acl}(B \cup \{c\}) \subset M$, luego $b \in \theta(M) \subset N$ y, en consecuencia, $c \in \text{acl}(B \cup \{b\}) \subset N$, ¡contradicción! Por lo tanto, T no admite pares de Vaught. \square

Lema 3.6. *Si T es c.f.m., si y sólo si, existen una fórmula $\varphi(x, \bar{y})$ sobre \emptyset y un tipo aislado $q \in S(\emptyset)$ tales que para todo modelo M de T y para todo $\bar{e} \in q(M)$, $\varphi(x, \bar{e})$ es f.m. y $M = \text{acl}(\varphi(M, \bar{e}) \cup \bar{e})$.*

Demostración. Supongamos que T es c.f.m. y sean A y D como en la definición. Por 5.7, existe una fórmula f.m. $\varphi(x, \bar{b})$, sin parámetros extra, donde \bar{b} realiza un tipo completo aislado sobre \emptyset . Así, por 3.4, $\mathfrak{C} = \text{acl}(\varphi(\mathfrak{C}, \bar{b}) \cup B)$.

Veamos ahora que existe una tupla \bar{c} que realiza un tipo aislado sobre \bar{b} tal que $\mathfrak{C} = \text{acl}(\varphi(\mathfrak{C}, \bar{b}) \cup \bar{c})$. Usando un argumento de compacidad, análogo al de la demostración de 3.2, es

posible obtener un entero positivo n y, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, fórmulas $\varphi_i(x, \bar{y}_i, \bar{a}_i)$, con $\bar{a}_i \subset A$ y sin parámetros extra, y enteros positivos n_i tales que para todo $c \in \mathfrak{C}$, existen $i \in \{1, \dots, n\}$ y $\bar{d}_i \subset \varphi(\mathfrak{C}, \bar{b})$ tales que $\models \varphi_i(c, \bar{d}_i, \bar{a}_i)$ y $|\varphi_i(\mathfrak{C}, \bar{d}_i, \bar{a}_i)| = n_i$. Tomemos n mínimo, en particular, esto garantiza que para cada i existe $\bar{d}_i \subset \varphi(\mathfrak{C}, \bar{b})$ tal que $|\varphi_i(\mathfrak{C}, \bar{d}_i, \bar{a}_i)| = n_i$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\bar{y}_i \cap \bar{y}_j = \emptyset$, siempre que $i \neq j$; dicho esto, sean $\bar{y} = \bar{y}_1 \cdots \bar{y}_n$ y $\bar{a}' = \bar{a}_1 \cdots \bar{a}_n$. Definimos $\sigma(x, \bar{y}, \bar{a}') = \bigvee_i \varphi_i(x, \bar{y}_i, \bar{a}_i)$, entonces para todo $c \in \mathfrak{C}$, existe $\bar{d} \subset \varphi(\mathfrak{C}, \bar{b})$ tal que $\models \sigma(c, \bar{d}, \bar{a}')$ y $|\sigma(\mathfrak{C}, \bar{d}, \bar{a}')| \leq \sum_i n_i$. Sea X el conjunto definido por

$$\forall z \exists \bar{y} (\sigma(z, \bar{y}, \bar{x}) \wedge \exists^{\leq \sum n_i} z \sigma(z, \bar{y}, \bar{x}) \wedge \bigwedge_j \varphi(y_j, \bar{b})),$$

así, X es definible sobre \bar{b} y $\bar{a}' \in X$, luego $X \neq \emptyset$, entonces, por 5.2, existe $\bar{c} \in X$ que realiza un tipo completo aislado sobre \bar{b} y, como \bar{b} realiza un tipo completo aislado sobre \emptyset , entonces, por 5.1, \bar{c} también realiza un tipo completo aislado sobre \emptyset . Dado que $\bar{c} \in X$, entonces, por la definición de X , $\mathfrak{C} = \text{acl}(\varphi(\mathfrak{C}, \bar{b}) \cup \bar{c})$, y, como $\bar{c} \supset \bar{b}$, podemos escribir esto como $\mathfrak{C} = \text{acl}(\varphi(\mathfrak{C}, \bar{c}) \cup \bar{c})$.

Finalmente, tomemos $q = \text{tp}(\bar{c}/\emptyset)$, así, como los tipos aislados no pueden ser omitidos, en todo modelo M de T se realiza q , sea $\bar{e} \in q(M)$, entonces por 5.4, $\varphi(x, \bar{e})$ es f.m.; además, existe $f \in \text{Aut}(\mathfrak{C})$ tal que $f(\bar{c}) = \bar{e}$, así, como sabemos que $\mathfrak{C} = \text{acl}(\varphi(\mathfrak{C}, \bar{c}) \cup \bar{c})$, aplicando f tenemos que $\mathfrak{C} = \text{acl}(\varphi(\mathfrak{C}, \bar{e}) \cup \bar{e})$, entonces para todo $c \in M$, existe $\bar{d} \subset \varphi(\mathfrak{C}, \bar{e})$ y una fórmula $\tau(x, \bar{d}, \bar{e})$, sin parámetros extra, tal que $\models \tau(c, \bar{d}, \bar{e})$ y $|\tau(\mathfrak{C}, \bar{d}, \bar{e})| = m$, para algún $m < \omega$, es decir,

$$\models \exists \bar{y} (\tau(c, \bar{y}, \bar{e}) \wedge \exists^=m x \tau(x, \bar{y}, \bar{e}) \wedge \bigwedge_j \varphi(y_j, \bar{e})),$$

y, como todos los parámetros de esta fórmula están en M , esto implica que

$$M \models \exists \bar{y} (\tau(c, \bar{y}, \bar{e}) \wedge \exists^=m x \tau(x, \bar{y}, \bar{e}) \wedge \bigwedge_j \varphi(y_j, \bar{e})),$$

luego, $M = \text{acl}(\varphi(M, \bar{e}) \cup \bar{e})$.

Para el recíproco, usando el teorema de Löwenheim-Skolem descendente, podemos escribir \mathfrak{C} como la unión de una cadena creciente elemental de modelos (de tamaño menor que $|\mathfrak{C}|$), es decir, $\mathfrak{C} = \bigcup_{i < |\mathfrak{C}|} M_i$, con $M_i \models T$ y $|M_i| < |\mathfrak{C}|$, para todo i , y $M_i \prec N_i$, siempre que $i < j$. Entonces, para $\varphi(x, \bar{y})$ y q como en el enunciado del lema, sea $\bar{e} \in q(M_0)$, así, $\varphi(x, \bar{e})$ es f.m. y, para todo i , $\bar{e} \in q(M_i)$ y, por lo tanto, $M_i = \text{acl}(\varphi(M_i, \bar{e}) \cup \bar{e})$. Luego $\mathfrak{C} = \text{acl}(\varphi(\mathfrak{C}, \bar{e}) \cup \bar{e})$. \square

El lema anterior nos da una definición alternativa de las teorías c.f.m. Una desventaja de dicha definición es que para ella no tenemos un resultado análogo al corolario 3.4. Pero, por otro lado, con ella podemos probar directamente categoricidad en los cardinales no contables como con las teorías f.m., es decir, extendiendo biyecciones elementales entre conjuntos a biyecciones elementales entre sus clausuras algebraicas. Además, esto puede dar un poco más de información, por ejemplo, si T c.f.m. y para todos M modelo de T y A subconjunto finito de M , $\text{acl}(A)$ es finito, entonces T es totalmente categórica; nótese que este es el caso de *TPP*.

4. Teorías no-contablemente categóricas no c.f.m.

Ya hemos visto un ejemplo de una teoría no-contablemente categórica que no es c.f.m, todos los ejemplos de dichas teorías corresponden a las teorías de modelos que pueden obtenerse

mediante la construcción de haces fibrados (fibre bundles) definibles sobre modelos f.m., a continuación presentamos esta construcción siguiendo [3]:

Dados P una L -estructura, $X \subset P^n$ definible y una familia definible de grupos $(G_a : a \in X)$ definibles en P , a continuación definimos una nueva estructura M . Para cada $a \in X$, sea Y_a un conjunto en el que G actúe regularmente, a un conjunto así se le llama espacio homogéneo principal para G . El dominio de M es la unión disyunta del dominio de P y los conjuntos Y_a . El lenguaje de M contiene a todos los signos de L y conservamos sus interpretaciones en P , además, tiene signos para la proyección canónica $\pi : \bigcup_{a \in X} Y_a \rightarrow X$, que es la función tal que $\pi(b) = a$ para $b \in Y_a$, y para una función ternaria f tal que, para cada $a \in X$, $f(a, \cdot, \cdot)$ define la acción de G_a en Y_a , finalmente, aceptamos estructura adicional en M siempre y cuando esta no modifique la estructura adicional en P , es decir, siempre y cuando todo subconjunto de P^m , para cualquier m , que sea definible en M sobre \emptyset , también sea definible en la estructura P sobre \emptyset . Con esto, decimos que M es un haz fibrado definible sobre P para la familia $(G_a : a \in X)$.

Los siguientes son algunos hechos sobre esta construcción:

- Todo modelo de $Th(M)$ es primo y minimal sobre la zona correspondiente a P en su interior, téngase en cuenta que P siempre es definible en M , por ejemplo mediante la fórmula $\neg \exists y \neg \exists z f(x, y, z)$.
- Usando lo anterior, puede probarse que si $Th(P)$ es no-contablemente categórica, entonces $Th(M)$ también lo es.
- Si todos los grupos G_a son finitos, entonces $M = acl(P)$. Lo mismo sucede en todos los modelos de $Th(M)$, por lo tanto, si P es (c.)f.m. y todos los grupos G_a son finitos, M es c.f.m.
- Si $b_a \in Y_a$, entonces $Y_a \subset acl(P \cup \{b_a\})$, luego $M = acl(P \cup \{b_a : a \in X\})$. Lo mismo sucede en todos los modelos de $Th(M)$, luego si X es finito y P es (c.)f.m., M es c.f.m.

Sobre cómo usar la construcción para obtener teorías no-contablemente categóricas no c.f.m., puede verse que suficiente realizarla con P f.m., X infinito y $G_a = G$ infinito. Veamos cómo podemos obtener de esta manera el ejemplo básico $M = (\bigoplus_{i < \omega} \mathbb{Z}_4, +)$:

Sea $P = (\bigoplus_{i < \omega} \mathbb{Z}_2, +)$, P es f.m. porque es un grupo en que todo elemento tiene orden 2, consideremos $X = P - \{0\}$ y, para cada $a \in X$, $G_a = P$. Dado que P actúa regularmente sobre sí mismo, podemos tomar cada Y_a esencialmente como G , siempre y cuando nos encarguemos de que los Y_a sean disyuntos, para esto tomamos Y_a como el conjunto $\{x \in M : 2x = a\}$. Luego, como conjuntos,

$$P \cup \bigcup_{a \in X} Y_a = \bigcup_{a \in 2M} \{x \in M : 2x = a\} = M.$$

Ahora veamos que la estructura de grupo en M incluye la que se define en la construcción, en el sentido de que es suficiente para definirla, la proyección canónica $\pi : \bigcup_{a \in X} Y_a \rightarrow X$ corresponde en este caso a la función $x \mapsto 2x$ y, por lo tanto, es definible con la operación de grupo en M , y, la función ternaria f , puede definirse mediante $f(x, y, z) = w \iff x \neq 0 \wedge 2y = 0 \wedge 2z = 2x \wedge w = y + z$. Además, la estructura de grupo en M es estructura adicional admitida en la construcción ya que no agrega nueva estructura en P porque su restricción a P coincide con la estructura original de P .

Para terminar, enunciaremos un teorema citado en [3] que establece que toda estructura no-contablemente categórica puede obtenerse a partir de un conjunto fuertemente minimal en su interior mediante sucesivas construcciones de haces fibrados:

Teorema 4.1. *Si $Th(M)$ es no-contablemente categórica y P es un conjunto fuertemente minimal en M , entonces existen un entero positivo k y estructuras $P = P_0, P_1, \dots, P_k = M$ tales que cada P_{i+1} es un haz fibrado definible sobre P_i . Además, los grupos G_a pueden tomarse todos en P y de manera que sean elementales abelianos, simples no abelianos finitos o infinitos sin subgrupos normales propios definibles infinitos.*

5. Hechos

Lema 5.1. *Si $tp(\bar{c}/\bar{b})$ y $tp(\bar{b}/\emptyset)$ son tipos aislados, entonces $tp(\bar{c}/\emptyset)$ también lo es.*

Lema 5.2. *Si T es ω -estable, entonces para todo A y todo $n < \omega$ los tipos aislados forman un subconjunto denso de $S_n(A)$.*

Lema 5.3. *Si D es f.m. y M es un modelo contable de T , entonces $\{tp(\bar{d}/M) : \bar{d} \subset D \text{ (finita)}\}$ es contable.*

Lema 5.4. *Si $\varphi(x, \bar{c})$ es una fórmula f.m., sin parámetros extra, y $tp(\bar{c}/\emptyset) = tp(\bar{e}/\emptyset)$, entonces $\varphi(x, \bar{e})$ también es f.m.*

Lema 5.5. *Si $\varphi(x)$ es una fórmula sobre un modelo \aleph_0 -saturado M y $\varphi(M)$ es minimal, entonces $\varphi(x)$ es f.m.*

Lema 5.6. *Si T es ω -estable y $\varphi(x)$ es una fórmula no algebraica sobre un modelo saturado contable M , entonces existe una fórmula f.m. $\psi(x)$ sobre M que implica $\varphi(x)$.*

Lema 5.7. *([2, págs. 212-213]) Si T es no-contablemente categórica, entonces existe una fórmula f.m. $\varphi(x, \bar{b})$, sin parámetros extra, donde \bar{b} realiza un tipo aislado sobre \emptyset .*

Lema 5.8. *([1, pág. 58]) Sean T una teoría tal que $D(T)$ es contable y A un conjunto contable. Si T admite un par de Vaught, entonces T admite un par de Vaught (M, N) con M y N modelos saturados contables y $N \supset A$.*

Lema 5.9. *([1, pág. 68]) Sea T una teoría contable. T es no-contablemente categórica, si y sólo si, T es ω -estable y no admite pares de Vaught.*

Referencias

- [1] S. Buechler, *Essential Stability Theory*, Springer, 1996.
- [2] D. Marker, *Model Theory: An introduction*, Springer, 2002.
- [3] A. Pillay, *Aspects of Geometric Model Theory*, en <http://www.math.uiuc.edu/People/pillay.html>
- [4] B. Zilber, *Elements of Geometric Stability Theory*, en <http://www.maths.ox.ac.uk/~zilber/>