Teoría de Conjuntos

Notas Finales

Andrés Villaveces

avillavecesn@unal.edu.co

El final

Este semestre aprendimos

- Axiomas de ZF

El final

Este semestre aprendimos

- Axiomas de ZF
- Axioma de Elección

El final

Este semestre aprendimos

- Axiomas de ZF
- Axioma de Elección
- Órdenes y buenos órdenes

El final

Este semestre aprendimos

- Axiomas de ZF
- Axioma de Elección
- Órdenes y buenos órdenes
- Ordinales

El final

Este semestre aprendimos

- Axiomas de ZF
- Axioma de Elección
- Órdenes y buenos órdenes
- Ordinales
- Cardinales - Aritmética Cardinal

El final

Este semestre aprendimos

- Axiomas de ZF
- Axioma de Elección
- Órdenes y buenos órdenes
- Ordinales
- Cardinales - Aritmética Cardinal
- V - jerarquía de von Neumann

El final

Este semestre aprendimos

- Axiomas de ZF
- Axioma de Elección
- Órdenes y buenos órdenes
- Ordinales
- Cardinales - Aritmética Cardinal
- V - jerarquía de von Neumann
- Estructura de los reales

El final

Este semestre aprendimos

- Axiomas de ZF
- Axioma de Elección
- Órdenes y buenos órdenes
- Ordinales
- Cardinales - Aritmética Cardinal
- V - jerarquía de von Neumann
- Estructura de los reales
- Jerarquía de Borel

El final

Este semestre aprendimos

- Axiomas de ZF
- Axioma de Elección
- Órdenes y buenos órdenes
- Ordinales
- Cardinales - Aritmética Cardinal
- V - jerarquía de von Neumann
- Estructura de los reales
- Jerarquía de Borel
- Combinatoria

¡Nunca definimos conjunto!

A diferencia de la situación para grupos, anillos, espacios topológicos, donde decimos cosas como

$(G, \cdot, e)$ es un grupo ssi

1. $\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$
2. $\forall x (e \cdot x = x = x \cdot e)$
3. $\forall x \exists y (x \cdot y = e = y \cdot x)$

no hay descripción sencilla de conjunto.

En su lugar... axiomas sobre $\in$

Evitar 'patologías':

- $x \in x$

En su lugar... axiomas sobre $\in$

Evitar 'patologías':

- $x \in x$
- $S = \{x | x$ no es conjunto$\}$ $(S \in S \Leftrightarrow S \notin S)$

En su lugar... axiomas sobre $\in$

Evitar ‘patologías’:

- $x \in x$
- $S = \{x | x \text{ no es conjunto}\}$ ($S \in S \Leftrightarrow S \notin S$)
- $\cdots \in x_4 \in x_3 \in x_2 \in x_1 \in x_0$

Construcción de V

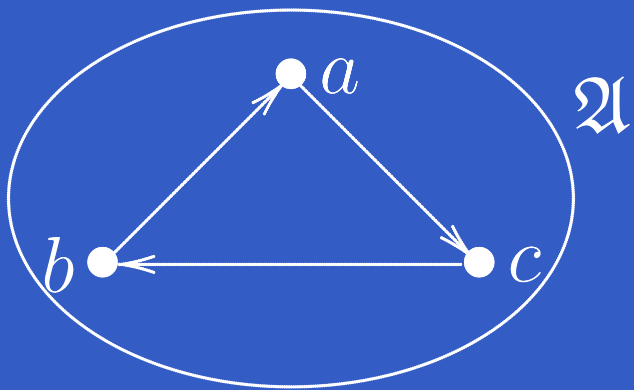
De manera muy prudente, escalamos despacio a partir del vacío $\emptyset$:

$\emptyset_a$: por Existencia y Comprensión:

$$\emptyset_a : x \in \emptyset_a \leftrightarrow x \in a \wedge x \neq x$$

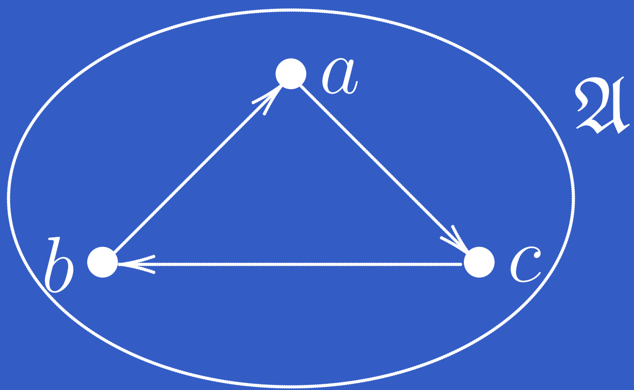
Unicidad de $\emptyset$: Extensionalidad.

Universos débiles



- $\mathfrak{A} \models$ Uniones, Extens., Partes, Fundamentación
- $\mathfrak{A} \not\models$ Pares, Infinito, Compr., Reempl.

Universos débiles



- $\mathfrak{A} \models$ Uniones, Extens., Partes, Fundamentación
- $\mathfrak{A} \not\models$ Pares, Infinito, Compr., Reempl.

(note que Fundamentación vale de 'manera extraña')

Y universos menos débiles...

- $V_\omega \models ZF-$ Infinito$+\neg$Infinito

Y universos menos débiles...

- $V_\omega \models ZF -$ Infinito$+\neg$Infinito
- $V_{\omega+\omega} \models ZF -$ Reemplazo$+\neg$Reemplazo

Y universos menos débiles...

- $V_\omega \models ZF-$ Infinito$+\neg$Infinito
- $V_{\omega+\omega} \models ZF-$ Reemplazo$+\neg$Reemplazo
- $V_{\omega+\lambda} \models ZF-$ Reemplazo (λ ordinal límite)

Y universos menos débiles...

- $V_\omega \models ZF-$ Infinito$+\neg$Infinito
- $V_{\omega+\omega} \models ZF-$ Reemplazo$+\neg$Reemplazo
- $V_{\omega+\lambda} \models ZF-$ Reemplazo (λ ordinal límite)
- $V_\kappa \models ZF$ si κ es fuertemente inaccessible!

Y universos menos débiles...

- $V_\omega \models ZF-$ Infinito$+\neg$Infinito
- $V_{\omega+\omega} \models ZF-$ Reemplazo$+\neg$Reemplazo
- $V_{\omega+\lambda} \models ZF-$ Reemplazo (λ ordinal límite)
- $V_\kappa \models ZF$ si κ es fuertemente inaccessible!
- $V \models ZF$

Fundamentación

Bajo $ZF-$Fundamentación...

$$AF : \forall a(a \neq \emptyset \rightarrow \exists b \in a(a \cap b = \emptyset))$$

captura lo que queremos:

$b \in b$?

Fundamentación

Bajo $ZF-$Fundamentación...

$$AF : \forall a(a \neq \emptyset \longrightarrow \exists b \in a(a \cap b = \emptyset))$$

captura lo que queremos:

$b \in b$? ¡NO!

sea $a = \{b\}$ entonces $a \neq \emptyset$ pero $b \in b \cap a \neq \emptyset$ (no hay $x \in a$ con $x \cap a = \emptyset$!)

Fundamentación

Bajo $ZF-$Fundamentación...

$$AF : \forall a(a \neq \emptyset \longrightarrow \exists b \in a(a \cap b = \emptyset))$$

captura lo que queremos:

$b \in b$? ¡NO!

sea $a = \{b\}$ entonces $a \neq \emptyset$ pero $b \in b \cap a \neq \emptyset$ (no hay $x \in a$ con $x \cap a = \emptyset$!)

igualmente, no tenemos $a_1 \in a_2 \in \cdots \in a_n \in a_1$:

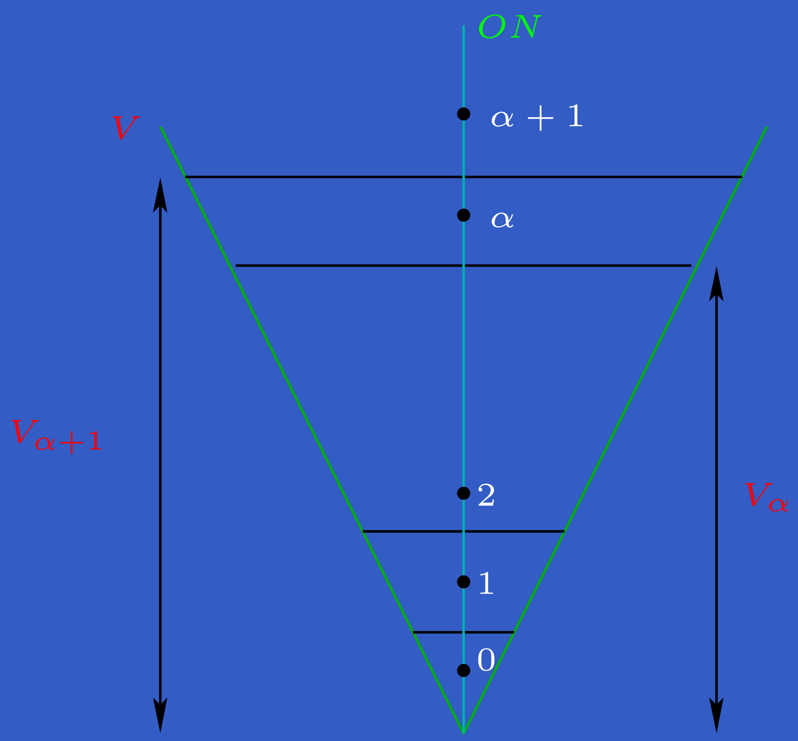
en ese caso, sea $a = \{a_1, \cdots, a_n\}$. Entonces de nuevo $a \cap a_i \ni a_{i-1}$ $(i > 1)$ y $a \cap a_1 \ni a_n$.

Anti-Fundamentación

Fundation es un axioma de un estilo distinto. Aunque evita las patologías mencionadas, si AF no vale uno todavía puede hacer la construcción de von Neumann... y mostrar que el 99.99$\%$ de la matemática tiene lugar ahí...

En los últimos 15-20 años, un axioma ‘alternativo’ (Anti-Fundamentación) ha recibido mucha atención. Los conjuntos mal fundamentados tienen un rol interesante en Teoría de la Computación.

Fundamentación - von Neumann



Los ordinales son la espina dorsal del universo

99% de la matemática (con toda certeza todos los cursos que usted ha visto hasta ahora - excepto este :-) 'viven' en niveles bajos de la jerarquía. Su curso de análisis $\in V_{\omega+\omega}$ (tal vez incluso está en $V_{\omega+17}$!)

Cosas que hay que saber acerca de los

1. Puntos fijos - funciones continuas
2. Suma, producto, exponenciación ordinales
3. α-sucesiones en $\mathbb{R}$, con α un ordinal

Cosas que hay que saber acerca de los

1. Cardinales de conjuntos de funciones o conjuntos de reales (como $|\{f|f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}\}|$)
2. Algo de aritmética cardinal
$$2^{\aleph_1} \leq \aleph_2^{\aleph_1} \leq (2^{\aleph_1})^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1\cdot\aleph_1} = 2^{\aleph_1} \text{ so } \aleph_2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1}$$
3. Consecuencias del lema de König
$$2^{\aleph_0} \text{ cannot be } \aleph_\omega$$
4. Propiedades básicas, tales como
$$\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$$

Independencia

Casos avanzados:

Gödel: $L \models ZF + CH$ (así $ZF \not\vdash \neg CH$)

Cohen: hay un modelo $V \models ZF + 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ (con lo cual $ZF \not\vdash CH$)

Independencia

Casos avanzados:

Gödel: $L \models ZF + CH$ (así $ZF \nvdash \neg CH$)

Cohen: hay un modelo $V \models ZF + 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ (con lo cual $ZF \nvdash CH$)

Pero...

Independencia

Casos avanzados:

Gödel: $L \models ZF + CH$ (así $ZF \nvdash \neg CH$)

Cohen: hay un modelo $V \models ZF + 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ (con lo cual $ZF \nvdash \; CH$)

Pero... usted conoce casos más sencillos:

$ZF-$Infinito $\nvdash$ Infinito

$ZF-$Reemplazo $\nvdash$ Reemplazo

Formas débiles de AC

¡Hay muchas! Las más importantes:

$$AC \longrightarrow DC \longrightarrow AC_{\aleph_0}$$

(ver notas en el blog)

Ojo:

$$AC \leftrightarrow ZL \leftrightarrow WO$$

Aritmética Cardinal

Básica: $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$, etc
Interesante: König y consecuencias

$$\kappa_i < \lambda_i (i \in I) \to \sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i$$

Corolario: $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa$, con lo cual $\mathrm{cf}(2^{\aleph_0}) \neq \aleph_0$.

Regular vs Singular

Fuertemente inaccesibles
Débilmente compactos
Si κ es débilmente compacto entonces κ es fuertemente inaccesible
Si κ es fuertemente inaccesible entonces $V_\kappa \models ZFC$

Ars Combinatoria

De Ramsey finito

$6 \longrightarrow (3)^2_2$

$\forall n, s, k \quad \exists R(n, s, k) \quad (R(n, s, k) \longrightarrow (n)^s_k)$

Ars Combinatoria

De Ramsey finito

$6 \longrightarrow (3)^2_2$

$\forall n, s, k \quad \exists R(n,s,k) \quad (R(n,s,k) \longrightarrow (n)^s_k)$

a Ramsey infinito

$$\omega \longrightarrow (\omega)^2_2$$

(y también $\omega \longrightarrow (\omega)^s_k$ para todo s, k)

Ars Combinatoria

De Ramsey finito

$6 \longrightarrow (3)^2_2$

$\forall n, s, k \quad \exists R(n, s, k) \quad (R(n, s, k) \longrightarrow (n)^s_k)$

a Ramsey infinito

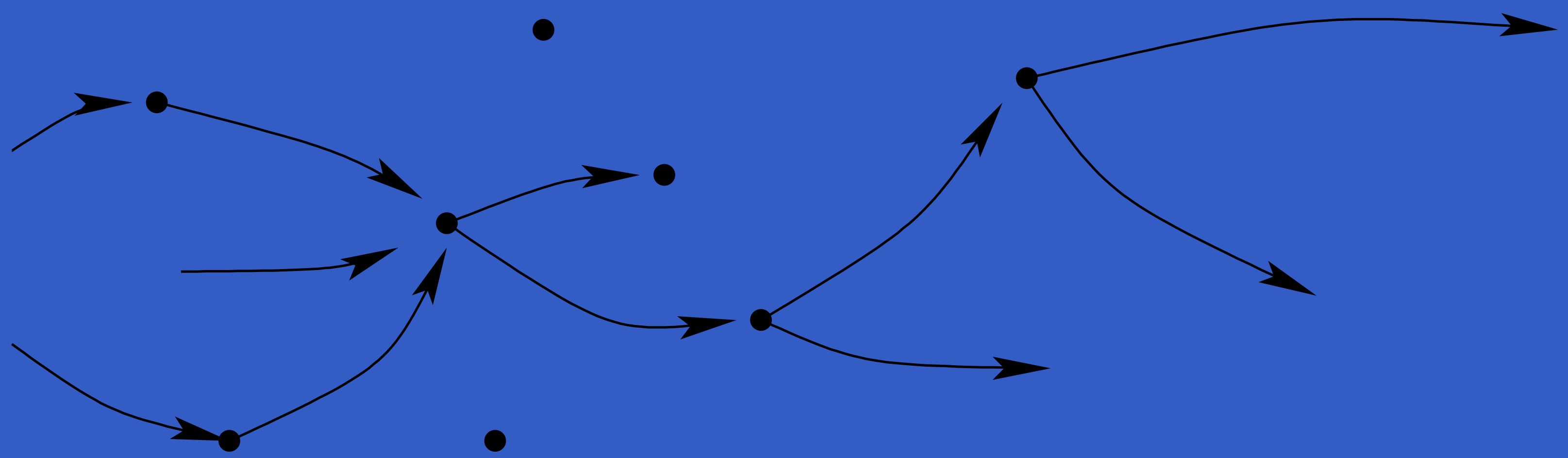
$$\omega \longrightarrow (\omega)^2_2$$

(y también $\omega \longrightarrow (\omega)^s_k$ para todo s, k) (no vimos demostración, pero ¡la puede revisar en el libro!)

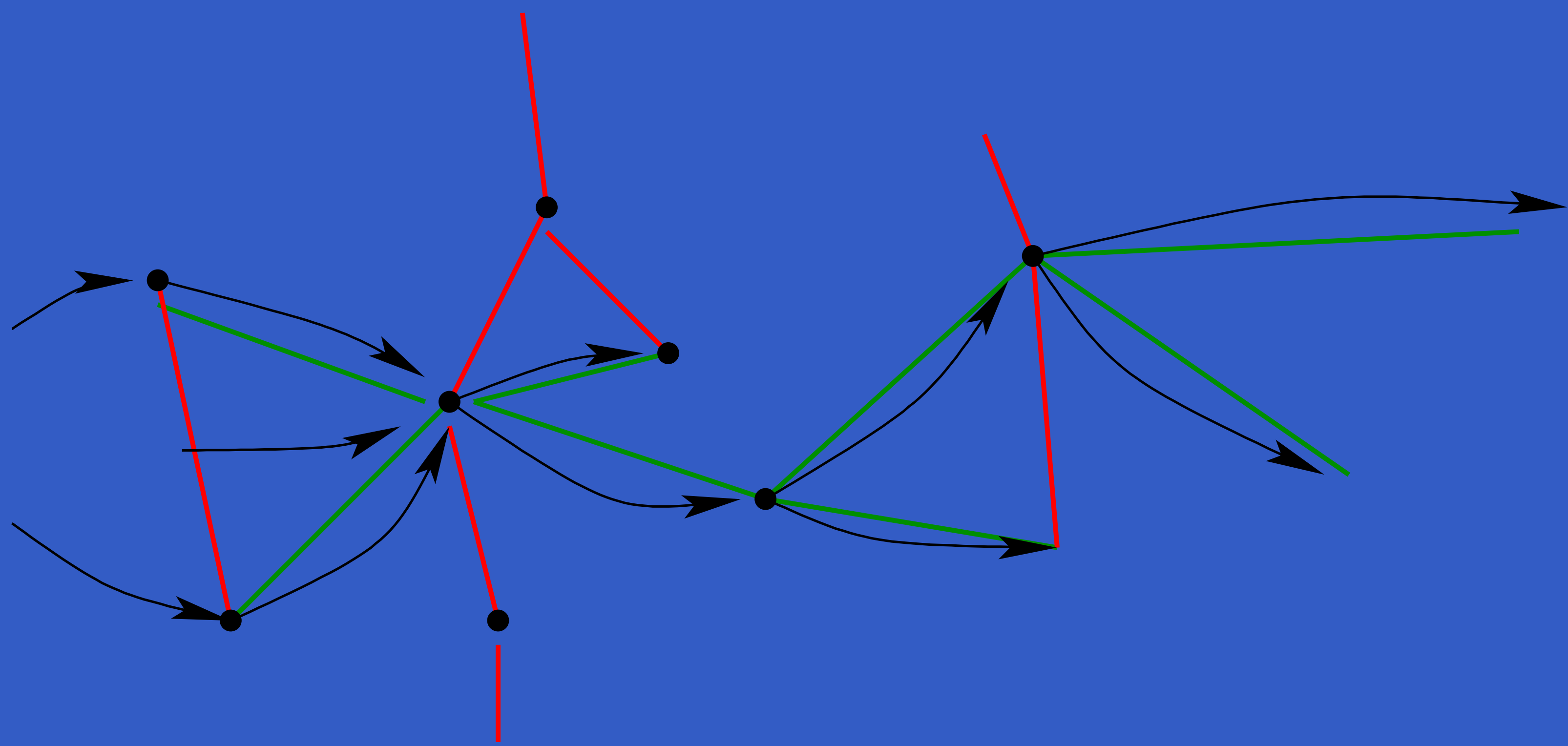
Ramsey y Aplicaciones

- Todo orden parcial infinito tiene una cadena infinita o una anticadena infinita.
- Todo orden lineal infinito tiene un subconjunto bien ordenado de tipo de orden ω o de tipo de orden ω^*.
- Extracciones similares de subconjuntos contables.

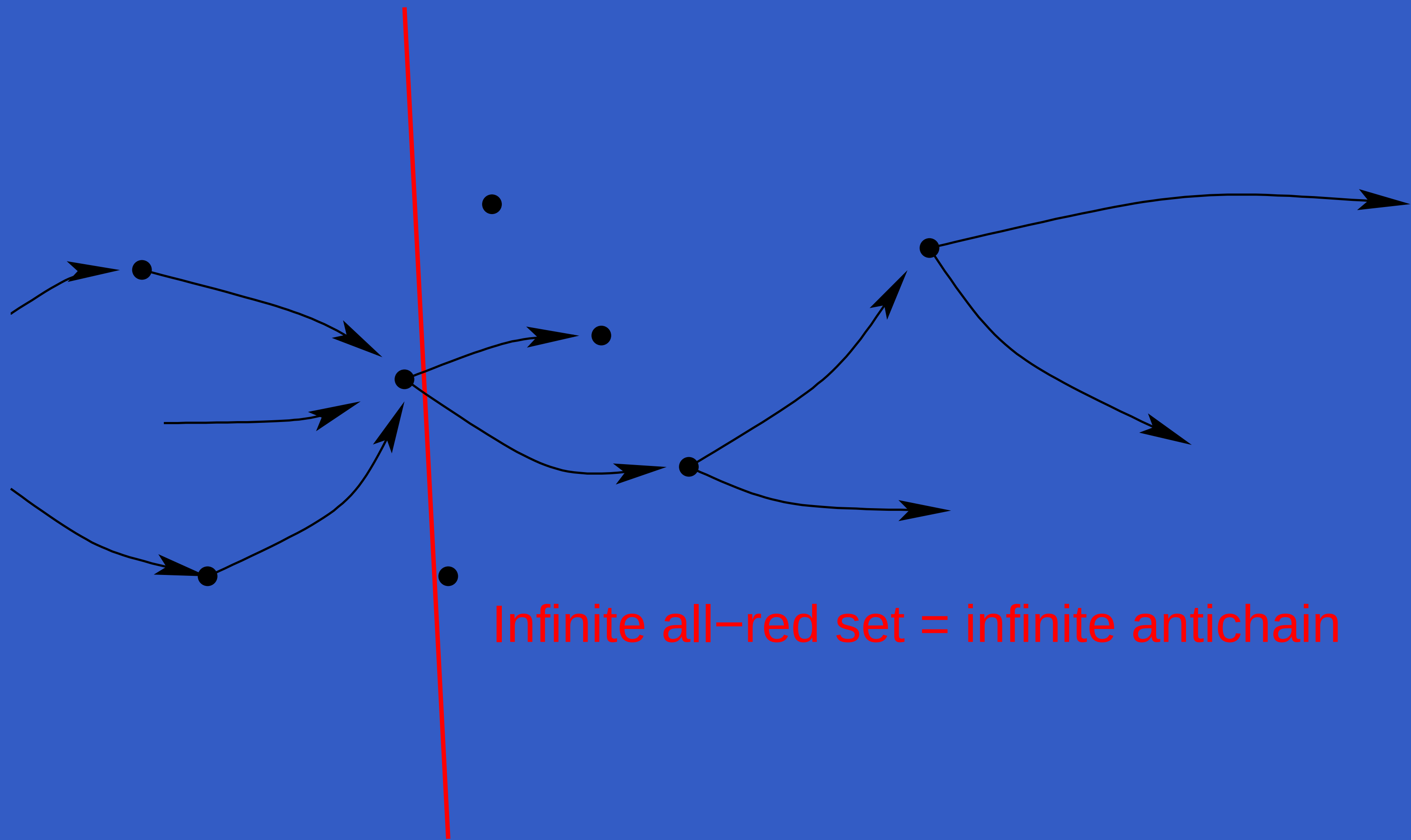
Conjuntos monocromáticos



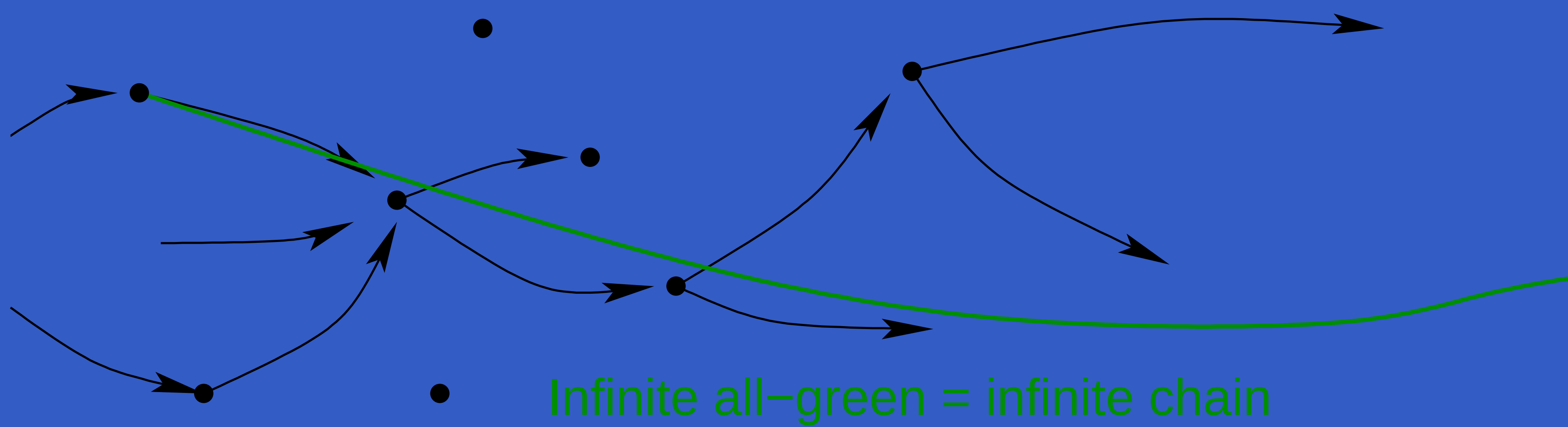
Conjuntos monocromáticos



Conjuntos monocromáticos



Conjuntos monocromáticos



¿Cupando más?

Casos negativos:

- $\omega_1 \not\to (\omega_1)^2_2$
- $\omega_2 \not\to (\omega_2)^2_2$
- $2^{\aleph_0} \not\to (\omega_1)^2_2$

Sin embargo...

¿Cupando más?

Casos negativos:

- $\omega_1 \not\to (\omega_1)^2_2$
- $\omega_2 \not\to (\omega_2)^2_2$
- $2^{\aleph_0} \not\to (\omega_1)^2_2$

Sin embargo... Erdös-Rado:

$$(2^{\aleph_0})^+ \to (\aleph_1)^2_{\aleph_0}$$

Erdös-Rado - colorear dimensiones su

Forma general de Erdös-Rado: para todo κ, para todo $n < \omega$,

$$(\beth_n(\kappa))^+ \longrightarrow (\kappa^+)^{n+1}_\kappa$$

Para $\kappa = \aleph_0$ y $n = 1$, esto da

$$(2^{\aleph_0})^+ \longrightarrow (\aleph_1)^2_{\aleph_0}$$

Erdös-Rado - colorear dimensiones su

Forma general de Erdös-Rado: para todo κ, para todo $n < \omega$,

$$(\beth_n(\kappa))^+ \longrightarrow (\kappa^+)^{n+1}_\kappa$$

Para $\kappa = \aleph_0$ y $n = 1$, esto da

$$(2^{\aleph_0})^+ \longrightarrow (\aleph_1)^2_{\aleph_0}$$

Para κ arbitrario y $n = 0$ esto corresponde a

$$(\beth_0(\kappa))^+ \longrightarrow (\kappa^+)^1_\kappa \ldots$$

la regularidad de κ^+.

Otros teoremas ‘estilo Ramsey’

Hay muchas variantes – finitas e infinitas de teoremas estilo Ramsey. Estas incluyen variantes para grafos bipartitos, o variantes en las cuales usted tal vez quiere especificar más cosas acerca del comportamiento de posibles conjuntos homogéneos - por ejemplo, que sean de tamaños $\neq$ prescritos para $\neq$ colores, o que sean abiertos o cerrados en alguna topología, o que sean no-nulos si hay medida... o que contengan progresiones aritméticas (van der Waerden), etc...)

Final (de verdad)

Todos estos temas cierran este curso de teoría de conjuntos. La teoría de conjuntos es un área muy activa de la lógica matemática - sobre todo, después del método de forcing debido a Paul Cohen (1962). Está llena de conexiones muy sorprendentes entre la estratosfera (grandes cardinales, etc.) y el 'mundo real': números fi nitos, y muy centralmente, los reales. La estructura de los reales fue el centro de las preguntas originales de Cantor. En muchos sentidos, la teoría de conjuntos aún tiene muchas cosas qué decir al respecto - medibilidad, conjuntos perfectos, topología, etc.