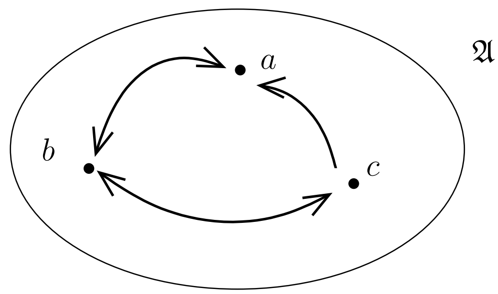
T. Conj. – I-2005 – Parcial 1 – Soluciones

1. ¿Qué axiomas de ZF satisface el modelo $\mathfrak{A} = (A, E)$? Justifique cinco de éstos.



$a_E = \{b, c\}$, $b_E = \{a, c\}$, $c_E = \{b\}$.
Valen: Extensionalidad (ver el renglón anterior).
Fallan: Pares (a y b no están **simultáneamente** en ningún conjunto), Uniones (los elementos de elementos de a son a, c y b - pero los tres no están **simultáneamente** en ningún conjunto), Comprensión (no hay vacío), Partes, Fundamentación, Infinito y Reemplazo.

2. Sean $\mathfrak{A} = \{X \subset \omega | X \text{ es finito o cofinito}\}$, y sea $\preceq$ la siguiente relación binaria en $\mathfrak{A}$:

$$X \preceq Y \Leftrightarrow \begin{cases} \text{o bien } X = Y \\ \text{o bien } \#(X)|_{\neq}\#(Y) \in \omega \\ \text{o bien } \#(\omega \setminus Y)|_{\neq}\#(\omega \setminus X) \in \omega \end{cases}$$

(a) Demuestre que $\preceq$ ordena a $\mathfrak{A}$ de manera no total.

$\{2, 3\}$ y ω no son comparables.

(b) Para $\mathfrak{B} = \{X \subset \omega | \#(X) \in \omega\}$ y $\mathfrak{C} = \{X \subset \omega | \#(\omega \setminus X) \text{ es potencia de } 5\}$, calcule $\text{máx}\,\mathfrak{B}$, $\text{mín}\,\mathfrak{C}$, $\text{minim}\,\mathfrak{B}$, $\check{\mathfrak{C}}$, $\sup \mathfrak{B}$.

$\text{máx}\,\mathfrak{B} = \emptyset$ (pues dado $X \in \mathfrak{B}$, X es finito - si es no vacío, entonces $\#(X)|_{\neq}0 = \#(\emptyset)$)
$\text{mín}\,\mathfrak{C}$ no existe
$\text{minim}\mathfrak{B} = \{X \subset \omega | |X| = 1\}$
$\check{\mathfrak{C}} = \emptyset$: para que X sea cota superior de $\mathfrak{C}$, se debe tener que $Y \preceq X$ para todo $Y \in \mathfrak{C}$, es decir $\#(\omega \setminus X)|_{\neq}\#(\omega \setminus Y) \in \omega$ - pero ningún número divide *y es distinto* de todas las potencias de cinco a la vez
$\sup \mathfrak{B} = \emptyset$ (pues el conjunto $\emptyset$ es el máximo de $\mathfrak{B}$).

3. En $\mathcal{P}(\omega)$, considere la relación

$$A \sim B \Leftrightarrow |A \Delta B| \in \omega.$$

(a) Demuestre que $\sim$ es relación de equivalencia.

La reflexividad y la simetría son inmediatas. La transitividad: si $A \sim B$ y $B \sim C$, entonces $A \setminus B$ y $B \setminus A$ son finitos, y también $B \setminus C$ y $C \setminus B$ son finitos. Pero entonces $A \setminus C = ((A \setminus B) \setminus C) \cup ((A \cap B) \setminus C) \subset ((A \setminus B) \cup (B \setminus C))$, y este último conjunto es finito por hipótesis, luego $A \setminus C$ es finito. Similarmente, $C \setminus A$ es finito.

(b) Describa la clase de equivalencia de $\emptyset$. ¿Es cierto que si A está en la clase de los pares, A debe ser siempre infinito?

La clase de equivalencia de $\emptyset$ consta de los conjuntos finitos: dado un conjunto cualquiera X, $X \Delta \emptyset = X$. Y claramente, si A está en la clase de los pares, A debe ser infinito, pues si F es finito, $2\mathbb{N} \Delta F$ es $(2\mathbb{N} \cup F) \setminus (2\mathbb{N} \cap F)$. Pero el primer conjunto es infinito y el segundo finito - un conjunto infinito menos uno finito siempre es infinito.

(c) Si cambiamos el último ω en la definición de $\sim$ por algún $n < \omega$, con $n > 0$, sigue siendo relación de equivalencia?

¡No! Ni siquiera resulta reflexiva.

4. Calcule $\aleph_1^{\aleph_1}$, $\aleph_0^{\aleph_0}$ y el cardinal del conjunto de sucesiones de reales ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$.

$\aleph_1^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1}$, $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, $|{}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{N}|} = (2_0^{\aleph})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

5. Demuestre que $]3,4]$ es equipotente a $[3,8]$.

Aplicar Cantor-Bernstein: la identidad es 1-1 de $]3,4]$ en $[3,8]$, la función $g(x) = x/6 + 2{,}6$ (¡por ejemplo!) es 1-1 de $[3,8]$ en $]3,4]$.

6. Considere la estructura $(\mathrm{div}(30), \wedge, \vee, |, 1, 30)$. Arme un conjunto X tal que la estructura $(\mathrm{div}(30), \wedge, \vee, |, 1, 30)$ sea isomorfa a $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, \subset, \emptyset, X)$.

$X = \{a, b, c\}$ sirve.

BONUS (5 décimas extra): lo mismo que lo anterior, pero para la estructura $(\omega, \wedge, \vee, |, 1, 0)$. (Ayuda: use el teorema de Cantor.)

No existe tal X: por Cantor, si X es infinito, el cardinal de $\mathcal{P}(X)$ es por lo menos $2^{\aleph_0}$. Pero el cardinal de ω es $\aleph_0$. Si dos estructuras son isomorfas, en particular sus universos tienen mismo cardinal. Pero esto es imposible entre ω y $\mathcal{P}(X)$.

7. En el plano $\mathbb{R}^2$, y con la relación de orden

$$(x,y) \preceq (z,w) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{o bien} & x^2+y^2 > z^2+w^2 \\ \text{o bien} & (x,y) = (z,w) \end{cases}$$

Halle maximales, minimales, máximo, mínimo, cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo de S^1, la diagonal $x = y$, y el conjunto

$$C = \{(x, \cos x) | x \in \ ]-4\pi, 4\pi]\}.$$

Obligatorio usar convención verde-rojo o convención en blanco y negro (¡un punto mal en su dibujo anula toda la respuesta!). Discutido en clase.