Hacia la prueba - esquema general

Expositor: Andrés Villaveces

4 de abril de 2005

Resumen

Notas de seminario, sobre la prueba del teorema de Grossberg-VanDieren-Villaveces. Basadas en notas manuscritas tomadas por Pedro Zambrano.

1. Arreglos directos

Recuerde que estamos demostrando que bajo las hipótesis

1. $\mathcal{K}$ es una cea con μ-DAP,
2. $\mathcal{K}$ es μ-Galois-estable,
3. La no-ruptura (en cardinal μ) satisface *localidad* y *no hay cadenas largas de ruptura*,

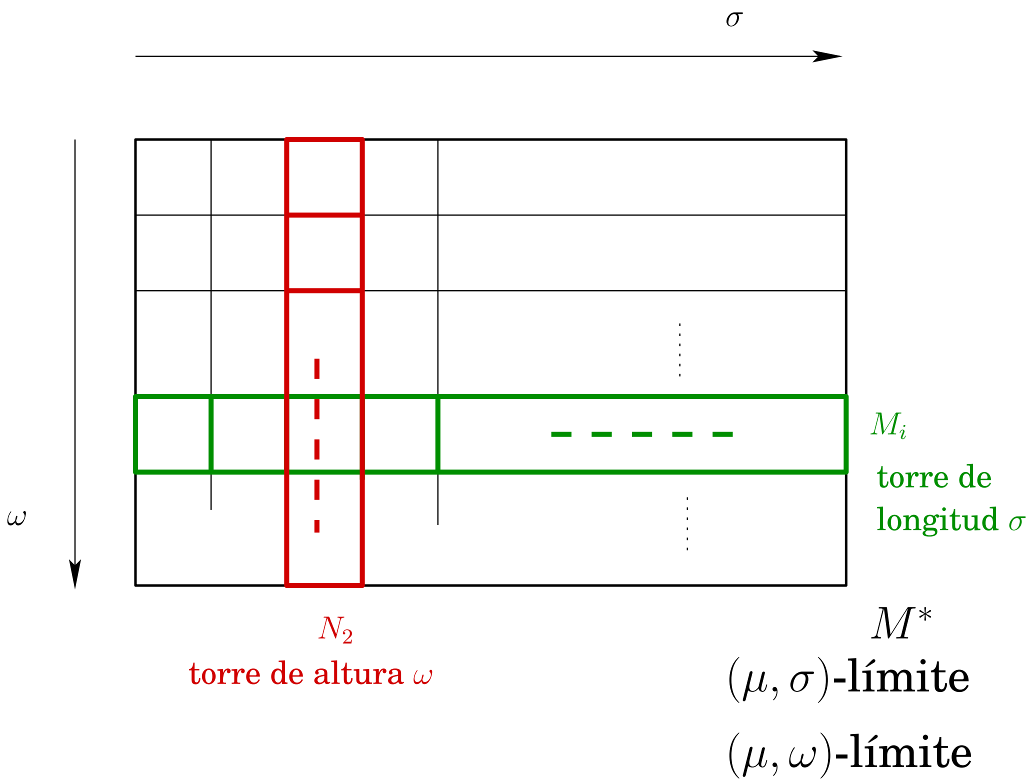
se tiene que para todo $\sigma_1, \sigma_2 < \mu^+$, si M_ℓ es (μ, σ_ℓ)-límite sobre M_0 entonces $M_1 \approx_{M_0} M_2$.

Primero hacemos las siguientes reducciones.

1. El caso $\operatorname{cf} \sigma_1 = \operatorname{cf} \sigma_2$ es mucho más fácil que el general: basta hacer un back-and-forth usando la definición de (μ, σ_1)-límites.
2. Basta demostrar el teorema para $\sigma_1 = \omega$, pues si se demuestra en este caso, se puede ver que todo par de modelos M_ℓ (μ, σ_ℓ)-límites sobre M_0 son isomorfos - pasando por el caso intermedio ω.

3. Finalmente, basta construir un modelo M^* que sea simultáneamente (μ, σ)-límite sobre M_0 y (μ, ω)-límite sobre M_0.

La idea inicial, que después hay que hacer más sofisticada, es armar un arreglo rectangular así:



En general, no es fácil demostrar que un arreglo así realmente produzca el modelo M^* que simultáneamente es (μ, σ)-límite y (μ, ω)-límite: el modelo (en rojo en la gráfica) N_{i+1} no necesariamente es universal sobre N_i.

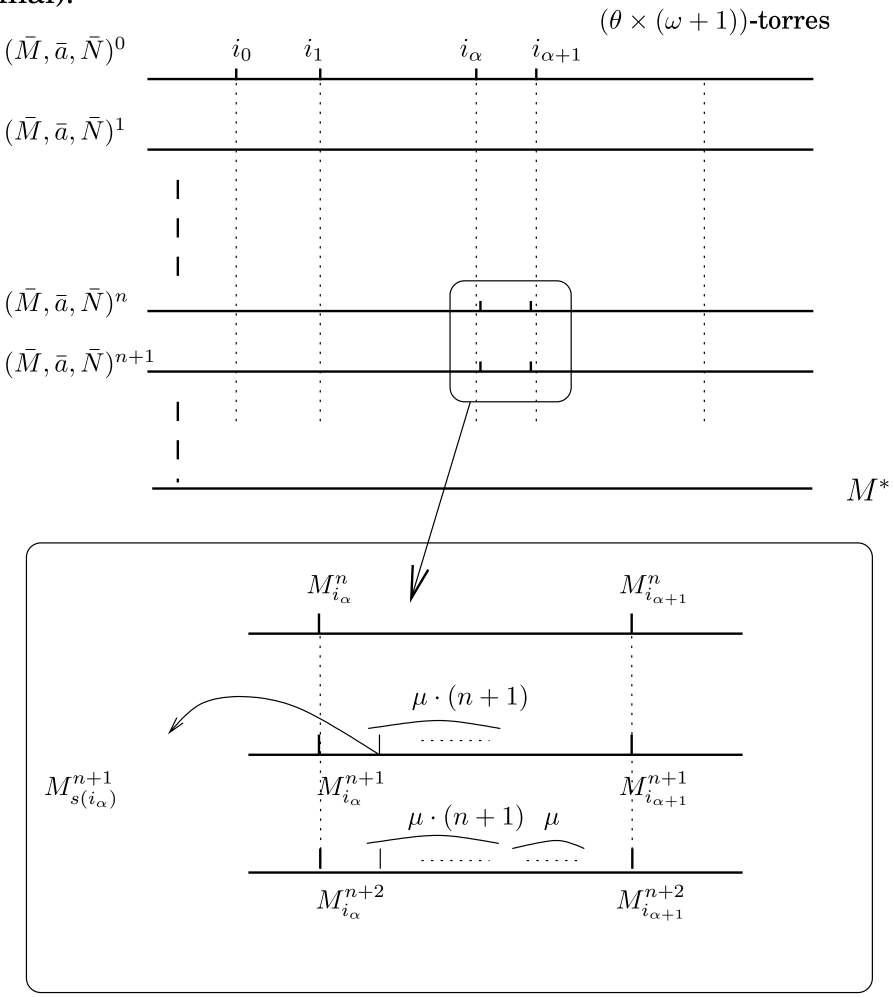
Problema 1.0.1 *La demostración más directa mencionada arriba funciona a veces con hipótesis más fuertes. Por ejemplo, en los casos siguientes.*

1. *$\mathcal{K} = Mod(T)$, T una teoría de primer orden ω-estable. En este caso el "arreglo directo" sí funciona para ver que M^* es simultáneamente (μ, σ)-límite y (μ, ω)-límite.*

2. *Suponga que $\mathcal{K}$ es una CEA con las hipótesis 1, 2 y 3, y adicionalmente es λ-categórica y homogénea. ¿Qué pasa en este caso con el arreglo directo?*

2. El arreglo indirecto

Suponga que $\theta = \mu \cdot \theta < \mu^+$. Por ejemplo $\theta = \mu^\omega$ (exponenciación ordinal).



Cada renglón es una torre de modelos, a lo largo de un buen orden I_n. La diferencia fundamental es que entre dos renglones n y $n+1$ las extensiones funcionan así: dados dos índices sucesivos en I_n, $i_\alpha < i_{\alpha+1}$, en el renglón $n+1$ del arreglo aparecen θ *modelos nuevos intermedios* en la cadena (ver en la gráfica arriba el "recuadro ampliado".

Las cofinalidades de los I_n siguen siendo igual a la de I_0.

$$M_i^\omega := \bigcup_{n<\omega, i\in I_n} M_i^n$$

Ojo: I_ω no está bien ordenado - todos los I_n ($n<\omega$) sí lo están. Sin embargo, a pesar de no estar bien ordenado, hay un conjunto cofinal de tipo de orden θ en I_ω.

2.1. Tipos fuertes y torres

Las siguientes dos definiciones nos permiten "amarrar" la construcción del arreglo indirecto (ver notas complementarias sobre el rol de estas construcciones).

Definición 2.1.1 *Fije un modelo M que sea (μ,σ)-límite. Entonces $\mathfrak{S}t(M)$ consta de los pares (p,N) tales que*

(a) $N \prec_{\mathcal{K}} M$*,*

(b) N *es* (μ,σ)*-límite,*

(c) M *es universal sobre* N*,*

(d) $p \in \mathrm{ga}-\mathrm{S}(M)$ *es no algebraico,*

(e) p *no* μ*-rompe sobre* N*.*

Los elementos de $\mathfrak{S}t(M)$ se llaman "tipos fuertes" sobre M.

La manera correcta de ver estos tipos fuertes es como tipos de Galois usuales, pero "amarrados" por un modelo límite N. Esto permite usar las torres que definimos más adelante.

Definición 2.1.2 *Dados $(p_1,N_1),(p_2,N_2) \in \mathfrak{S}t(M)$, $(p_1,N_1) \sim (p_2,N_2)$ ssi para todo $M' \in \mathcal{K}_\mu$ tal que $M \prec_{\mathcal{K}} M'$, existe $q \in \mathrm{ga}-\mathrm{S}(M')$ tal que $q \geq p_1, p_2$, q no μ-rompe sobre N_1 y tampoco μ-rompe sobre N_2.*

La anterior definición se puede extender aún más: dos tipos fuertes *sobre modelos distintos* (p_1, N_1) y (p_2, N_2) son *paralelos* ssi para todo $M' \in \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathrm{Dom}\ (p_1) \prec_{\mathcal{K}} M'$ y $\mathrm{Dom}\ (p_2) \prec_{\mathcal{K}} M'$, existe $q \in \mathrm{ga} - \mathrm{S}(M')$ tal que $q \geq p_1, p_2$, q no μ-rompe sobre N_1 y tampoco μ-rompe sobre N_2.

Dos cosas claves: $\sim$ es relación de equivalencia, y si $\mathcal{K}$ es μ-Galois-estable, entonces para todo $M \in \mathcal{K}_\mu$, se tiene

$$|\mathfrak{St}(M)/\sim| \leq \mu.$$

Y ahora, la definición fundamental.

Definición 2.1.3 *$\mathcal{K}^*_{\mu,\sigma}$ consta de las triplas $(\bar{M}, \bar{a}, \bar{N})$ tales que*

(a) *$\bar{M} = \langle M_i | i < \sigma\rangle$ es una sucesión $\prec_{\mathcal{K}}$-creciente (¡no necesariamente continua!) de modelos límite de cardinal μ,*

(b) *$\bar{a} = \langle a_i | a_{i+1} < \sigma\rangle$ es tal que $a_i \in M_{i+1} \setminus M_i$,*

(c) *$\bar{N} = \langle N_i | i + 1 < \sigma\rangle$,*

(d) *$\mathrm{ga} - \mathrm{tp}(a_i/M_i)$ no μ-rompe sobre N_i, y M_i es universal sobre N_i.*

Podemos llamar estos objetos “torres amarradas”. Esta definición es solo una de varias modalidades, que aparecen en Shelah-Villaveces ([Sh-Vi 635]) y son usadas en la tesis doctoral de VanDieren.

Estas torres se pueden también ver (según el contexto) como modelos generalizados, o mejor aún, como tipos fuertes generalizados.

Incluso se pueden ver como tipos promedio generalizados.

En este momento, hace falta un *lema de extensión*, que permita pasar de $(\bar{M}, \bar{a}, \bar{N})^n$ a $(\bar{M}, \bar{a}, \bar{N})^{n+1}$.

La siguiente definición da un enlace entre torres y arreglos.

Definición 2.1.4 *Sea $(\bar{M}, \bar{a}, \bar{N})$ una I-torre, con I un orden con conjunto cofinal $\langle i_\alpha | \alpha < \sigma\rangle$ tal que cada M_i es (μ, σ)-límite. Suponga que para todo $i \in I$,*

$$(M_i^\gamma | \gamma < \sigma)$$

es testigo de que M_i es (μ, σ)-límite. Se dice que $(\bar{M}, \bar{a}, \bar{N})$ es plena *sobre $(M_i^\gamma | \gamma < \sigma, i \in I)$ si para todo $(p, M_i^\gamma) \in \mathfrak{St}(M_i)$, con $i \in [i_\alpha, i_{\alpha+1}[$, existe $j \in I$, con $j \in [i_\alpha, i_{\alpha+1}[$ tal que*

$$\mathrm{ga} - \mathrm{tp}(a_j/M_j, N_j) \qquad \| \qquad (p, M_i^\gamma).$$