Lógica - Parcial 2 - Soluciones

(A) Sean Γ una teoría y φ una sentencia.

1. Demuestre que

$$\Gamma \models \varphi \text{ ssi } \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ no tiene modelos.}$$

$\rightarrow$: Si $\Gamma \models \varphi$, entonces dado cualquier modelo $\mathfrak{A} \models \Gamma$, $\mathfrak{A}$ debe satisfacer también φ. Si existiera $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, en el modelo $\mathfrak{A}$ valdrían simultáneamente φ y $\neg\varphi$, lo cual es imposible.
$\leftarrow$ es similar: si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ no tiene modelos, es porque todo modelo de Γ debe satisfacer también φ.

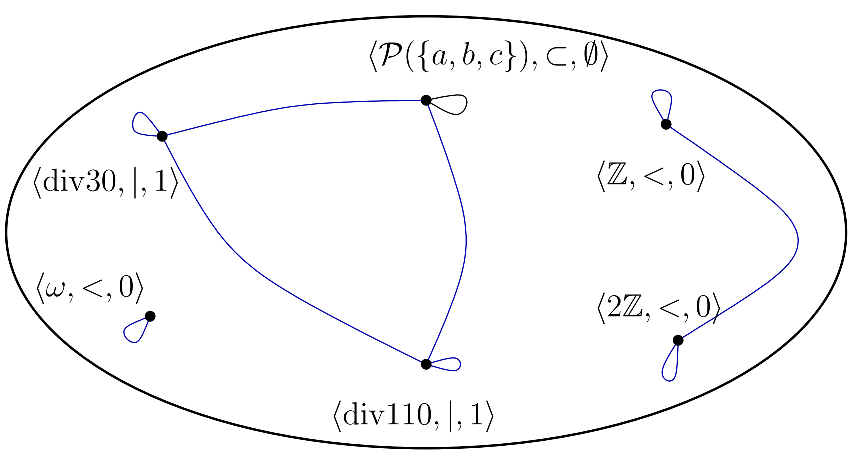
2. Demuestre que

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ ssi } \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ es inconsistente.}$$

$\rightarrow$: hay que deducir una inconsistencia a partir de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Basta tomar una Γ-deducción de φ (pues $\Gamma \vdash \varphi$), y pegar en el siguiente renglón $\neg\varphi$. Combinando (y usando RT) tenemos una $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$-deducción de $\varphi \wedge \neg\varphi$.
$\leftarrow$: suponga que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente. Entonces (en particular), se tiene que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$. Por TD, esto implica que $\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \varphi$. Pero por otro lado, $(\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ es una tautología. Luego, por RT, $\Gamma \vdash \varphi$.

(B) Dos estructuras (para el mismo lenguaje L) $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son *elementalmente equivalentes* ($\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$) si dada cualquier sentencia φ de L, $\mathfrak{A} \models \varphi$ ssi $\mathfrak{B} \models \varphi$. La relación $\equiv$ claramente es una relación de equivalencia.

1. Complete el siguiente grafo. Aquí está el grafo completado:



2. Justifique *muy cuidadosamente* dos de sus decisiones del paso anterior (puede ser más fácil justificar la ausencia de flechas que la presencia de estas). Por ejemplo: los bucles, pues obviamente toda estructura es $\equiv$ a sí misma. O la ausencia de flecha entre $\langle \mathrm{div}30, |, 1\rangle$ y (por ejemplo) $\langle \mathbb{Z}, <, 0\rangle$: $\langle \mathrm{div}30, |, 1\rangle \models \exists^{=8}x(x = x)$, y $\langle \mathbb{Z}, <, 0\rangle \models \neg\exists^{=8}x(x = x)$. O la flecha de $\langle \mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subset, \emptyset\rangle$ a $\langle \mathrm{div}110, |, 1\rangle$ por la transitividad de $\equiv$. O la no flecha entre $\langle \omega, <, 0\rangle$ y $\langle \mathbb{Z}, <, 0\rangle$, pues la primera estructura satisface $\forall x(x = 0 \vee 0 < x)$ y la segunda no. Etc. etc.

(C) Escriba deducciones en los dos casos a continuación. Su escritura debe estar justificada renglón por renglón, con los símbolos Γ, Λ, MP(★,♠), G$\forall$, TD, RA o RT.

1. $\vdash \forall xP(x, f(x)) \to \forall x\exists yP(x, y)$
   Basta ver (por TD) $\forall xP(x, f(x)) \vdash \forall x\exists yP(x, y)$.
   Como x no ocurre libre en $\forall xP(x, f(x))$, basta ver que $\forall xP(x, f(x)) \vdash \exists yP(x, y)$, es decir
   basta ver que $\forall xP(x, f(x)) \vdash \neg\forall y\neg P(x, y)$.
   Por RA, basta ver que $\{\forall xP(x, f(x)), \forall y\neg P(x, y)\}$ es inconsistente.
   Pero esto ahora es fácil, pues las dos fórmulas, con el axioma 2, dan $P(x, y)$ y $\neg P(x, y)$ (hay que ver por qué es permitido el reemplazo en cada caso)... y RT da el resultado que queremos.

2. $\vdash \exists x(x = x)$
   Es decir, $\vdash \neg\forall x\neg(x = x)$.
   Basta ver, por RA, que $\Gamma = \{\forall x\neg(x = x)\}$ es inconsistente.

   a) $\forall x\neg(x = x)$ Γ
   b) $\forall x\neg(x = x) \to \neg(x = x)$ Ax 2
   c) $\neg(x = x)$ MP(a,b)
   d) $x = x$ Ax 5.

(D) Sea $\mathfrak{A} = \langle B \cup C, <^{\mathfrak{A}}\rangle$, donde $B = \mathbb{N} \times \{0\}$ y $C = \mathbb{Z} \times \{1\}$ (así, el universo $A = B \cup C$ consiste de una copia de los naturales en unión disyunta con una copia de los enteros). El orden corresponde a 'pegar' el orden de $\mathbb{N}$ con el de $\mathbb{Z}$:

$$(n, i) <^{\mathfrak{A}} (m, j) \text{ ssi } i < j \text{ ó } (i = j \text{ y } n < m).$$

1. ¿Es $\{(0, 0)\}$ definible en $\mathfrak{A}$?
   Sí, pues $(0, 0)$ es el mínimo de toda la estructura. Es decir, la fórmula

   $$\varphi(x) = \forall y(x = y \vee x < y)$$

   define al síngleton $\{(0, 0)\}$.

2. ¿Es $\{(0,1)\}$ definible en $\mathfrak{A}$?

No: el automorfismo siguiente (por ejemplo) muestra que no:

$$f : A \to A : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in B \\ \text{sucesor de } x & \text{si } x \in C \end{cases}$$

Claramente es un automorfismo (la "copia $\mathbb{N}$" queda fija, la "copia $\mathbb{Z}$" se corre): f es biyectiva y $a <^{\mathfrak{A}} b \Leftrightarrow f(a) <^{\mathfrak{A}} f(b)$ es claro (¡tres casos!). Pero

$$f(\{(0,1)\}) = \{(1,1)\}.$$

(Conviene recordar que la no definibilidad se puede capturar con automorfismos: si D es definible en $\mathfrak{A}$, entonces todo automorfismo de $\mathfrak{A}$ deja fijo D como conjunto. Así, para ver que algún conjunto *no* es definible en $\mathfrak{A}$, basta encontrar un automorfismo de $\mathfrak{A}$ que *no* lo deje fijo.)