Lógica - Parcial 1 – Agosto 2004 – Soluciones

(1) (a) Trabajamos en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Sean $B = \{A \subset \mathbb{N} | |A| = 3\}$, $K = \{F, G\}$, donde

$$F(X, Y) = X \cap Y, \quad G(X) = \mathbb{N} \setminus X.$$

¿Satisface $C(B, K)$ el teorema de lectura única? (8 pt)

No. Por ejemplo, $\{1, 2, 3\} = G(G(\{1, 2, 3\})) = G(G(G(G(\{1, 2, 3\}))))$.

¿Quién es $C(B, \{F\})$? (8 pt)

$$\{A \subset \mathbb{N} | |A| \leq 3\}$$

¿Es cierto o falso que $2\mathbb{N} \in C(B, K)$? (8 pt)

Falso. $C(B, K)$ consta exactamente de todos los *finitos* y *cofinitos* (¡usted debe poder explicar por qué esto último!)

(b) Escriba una definición **inductiva** de la función p que asigna a cada *fbf* α el peso de la fórmula $p[\alpha]$ (la longitud máxima de una rama en el árbol de la fórmula).

Ayuda: el peso de $((\neg A_1) \wedge A_2)$ es 2. (18 pt)

$$\begin{array}{lcl} \alpha \text{ es l.p.} & : & p[\alpha] = 0 \\ \alpha = \neg\beta & : & p[\alpha] = p[\beta] + 1 \\ \alpha = \beta\clubsuit\gamma & : & p[\alpha] = \text{máx}\{p[\beta], p[\gamma]\} + 1 \end{array}$$

(2) ¿Verdadero o falso? Demuestre o justifique según el caso. Si la demostración hace uso de algún teorema importante visto en clase, puede sencillamente invocar ese teorema.

(a) Si $\alpha \wedge \beta$ es tautología, entonces α es tautología y β es tautología. (13 pt)

Verdadero: si $\alpha \wedge \beta$ es tautologí a, entonces toda valuación v (de las l.p. de $\alpha \wedge \beta$) es tal que $\bar{v}[\alpha \wedge \beta] = V$, pero esto implica que $\bar{v}[\alpha] = V = \bar{v}[\beta]$. Y si α es tautologí a y β es tautologí a, toda valuación (de las l.p. de $\alpha \wedge \beta$) vale V en α y en β, luego $\bar{v}[\alpha \wedge \beta] = V$.

(b) $\{A_1, A_1 \wedge A_2, \cdots, A_1 \wedge A_2 \cdots \wedge A_n, \cdots\}$ tiene un subconjunto independiente al cual es equivalente.(13 pt)

Falso. Discutido en clase (pero en su parcial debe escribir por qué.)

(c) $\alpha \vee \beta$ es satisfactible ssi α es satisfactible o β es satisfactible. (13 pt)

Verdadero: suponga primero que $\alpha \vee \beta$ es satisfactible, y sea v tal que $\bar{v}[\alpha \vee \beta] = V$. Entonces necesariamente al menos uno de los valores $\bar{v}[\alpha]$ o $\bar{v}[\beta]$ debe ser V. Suponga ahora que una entre α y β es satisfactible, spg $\bar{v}[\alpha] = V$. Entonces $\bar{v}[\alpha \vee \beta] = V$.

(3) (a) Pase la fórmula $((A_1 \vee A_2) \wedge A_1)$ a forma normal disyuntiva. (13 pt)

$$(A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge \neg A_2)$$

(debe llenar detalles)

(b) Demuestre que el cuantificador ternario $\otimes^3[\alpha, \beta, \gamma] = [(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma]$ no es completo. (13 pt)

Demuestre el miniteorema de V en el primer renglón, y concluya.

(c) Pase la *fbf*^{pol}

$$\wedge \rightarrow A_1 \vee \wedge A_1 \neg A_4 \rightarrow \rightarrow A_3 \neg A_5 \wedge \neg A_3 A_1 A_7$$

de polaca a infija. (13 pt) (Después de armar el árbol,) debe lograr

$$((A_1 \rightarrow ((A_1 \wedge (\neg A_4)) \vee ((A_3 \rightarrow \neg A_5) \rightarrow ((\neg A_3) \wedge A_1)))) \wedge A_7)$$